BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: ______________________

ACA0864
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B62357
035/2: : |a (CaOTULAS)160323444
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Döttl, Johann.
245:00: |a Neue merkwürdige Punkte des Dreiecks. |c Von professor Joh. Döttl.
260: : |a Wien, |a Leipzig, |b A. Pilcher's witwe und sohn |c [1886]
300/1: : |a 59 p. |b 21 diagr. on 3 fold. pl. |c 24 cm.
500/1: : |a Cover title.
650/1: 0: |a Triangle
998: : |c WFA |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: ____________
Camera Operator: ______________

Wissenschaftliche Abhandlungen Nr. 16.

Neue merkwürdige Punkte des Dreiecks

Von

Professor **Joh. Döttl.**

Commissions-Verlag von A. Pichler's Witwe & Sohn,
Buchhandlung in Wien und Leipzig.

Wesen des griechischen Accents und seine .chnung. Von Prof. A. Meingast. I. Theil . II. Theil 62 S. geh. 2 M. = 1 fl. 26–27

agischen Affecte: Mitleid und Furcht nach istoteles. Von Prof. Dr. K. Tumlirz. 40 S. eh. 90 Pf. = 45 kr. 36

Smyrna-Reden des Aelius Aristides. Übersetzt von Dir. A. Schwarz. 24 S. geh. 80 Pf. = 40 kr. 38

Quaestiones criticae. I. De Callimacho Apollonii Rhodii inimico. II. Conjecturae ad Heroides Ovidianas. Von Prof. Dr. H. Jurenka. 20 S. geh. 50 Pf. = 25 kr. 41

Würdigung des Thukydides vom ethischen Standkte aus. Von Prof. Dr. J. Müller. 25 S. geh. f. = 25 kr. 67

onische Anamnesis. Von Prof. G. Stanger. geh. 70 Pf. = 35 kr. 117

ische und exegetische Erörterungen zu den .chinierinnen des Sophokles. Von Prof. Dr. Fr. Schubert. I. Th. 24 S. geh. 50 Pf. = 25 kr. 69

Die Comparation in der griechischen Sprache. Von Dir. Dr. J. Laroche. I. Theil 23 S. II. Theil 22 S. geh. 90 Pf. = 45 kr. 80–81

Das Teiresiasorakel. Von Prof. D. Jäkel. 44 S. geh. 90 Pf. = 45 kr. 77

Zur Würdigung der Trachiniai des Sophokles. Von Prof. R. Schreiner. 80 S. geh. 3 M. = fl. 1.50 98

Rgveda I. 143. Text, Übersetzung und Commentar von Prof. Dr. K. Glaser. 24 Seiten, geh. 50 Pf. = 25 kr. 107

Moderne Sprachen.

Deutsche Worte im Ladinischen. Von Prof. J. Mischi. 32 S. geh. 70 Pf. = 35 kr. 4

Assimilation im Rosenthaler Dialect. Ein Beitrag zur kärntnerisch-slovenischen Dialectforschung. Von Prof. J. Scheinigg. 23 S. geh. 50 Pf. = 25 kr. 29

Beiträge zu Alpharts Tod. Von Prof. Dr. Rud. Löhner. 24 S. geh. 50 Pf. = 25 kr. 42

Über die reduplicierten Praeterita der germanischen Sprachen und ihre Umwandlung in Ablautende. Von Dir. I. Pokorny. 30 Seiten geh. 60 Pf. = 30 kr. 110

Das Verhältnis von Strickers Karl zum Rolandliede des Pfaffen Konrad mit Berücksichtigung der Chanson de Roland. Von Prof. J. J. Ammann. 27 S. geh. 60 Pf. = 30 kr. 46

Zur Geschichte und Literatur des Meistergesanges in Ober-Österreich. Mit Benützung bisher unedierter Handschriften. Von Prof. Dr. H. Widmann. 44 S. geh. 1 M. = 50 kr. 54

Zur Bestimmung des Kreises der Aufsatzformen im Elementar-Unterrichte. Von Prof. K. Jauker. 20 S. geh. 50 Pf. = 25 kr. 64

Zu den neuen österr. Gymnasial-Instructionen für die Sprachfächer. Von Dir. I. Pokorny. 16 Seiten geh. 40 Pf. = 20 kr. 109

Die mittelhochdeutsche Dichtung Lohengrin, eine Mosaik aus Wolfram von Eschenbach. Von Prof. J. Traunwieser. 64 S. geh. M. 1.30 = 65 kr. 97

Das deutsche Volkslied und seine Bedeutung für die neuhochdeutsche Kunst-Dichtung. Von Prof. Heinrich Otto. 28 S. geh. 60 Pf. = 30 kr. 102

Über Schiller's Begriff des Sittlich-Schönen. Ein Beitrag zur Förderung der Lectüre des Dichters an unseren Gymnasien. Von Prof. Dr. Ant. Frank. 20 S. geh. 50 Pf. = 25 kr. 52

Systematisch-praktische Darstellung des neufranzösischen Verbs für den Schulgebrauch. Von Prof. A. Seeger. 51 S. geh. M. 1.20 = 60 kr. 75

Shakespeare's „Perikles" und George Lilio's „Marina". Von Prof. Dr. P. v. Hofmann-Wellenhof. 19 S. geh. 50 Pf. = 25 kr. 62

Schulcommentar zu Milton's „Paradise lost" Gesang I.—VI. Von Prof. Joh. Baudisch. 82 S. geh. M. 1.60 = 80 kr. 33

Vocabularium einzelner Ausdrücke und Redensarten, welche dem Spanischen der philippinischen Inseln eigenthümlich sind. Mit einem Anhange: Alphabetisch geordnete Sammlung einer Anzahl von Druckschriften und Manuscripte linguistischen, geographischen, ethnographischen, historischen und naturwissenschaftlichen Inhalts, die auf die Philippinen Bezug haben. Von Prof. Ferd. Blumentritt. 64 S. geh. M. 1.40 = 70 kr. 94

Mathematik.

Auflösungsmethoden algebraischer Gleichungen des III. und IV. Grades mit einer Unbekannten. Von Prof. M. J. Koch. 64 S. und 4 Tafeln. geh. 2 M. = 1 fl. 99

Einige Anwendungen der Hamilton'schen Quaternionen. Von Prof. Jos. Merten. 36 S. geh. 80 Pf. = 40 kr. 22

Die Cassinische Curve. Von Prof. S. Hudler. 58 S. mit 2 Taf. geh. 2 M. = 1 fl. 116

Die Subjectivität des Raumes und das XI. Euklidsche Axiom. Von Prof. H. Wehr. 45 S. geh. 1 M. = 50 kr. 119

Construction der Linien zweiter Ordnung aus umschriebenen Vierecken. 20 S. mit 2 Tafeln. Die darstellende Geometrie als Unterrichtsgegenstand an Realschulen. Von Prof. A. Barchanek. 29 S. geh. M. 1.50 = 75 kr. 11

Neue merkwürdige Punkte des Dreiecks. Von Prof. Joh. Döttl. 59 S. mit 3 Taf. geh. M. 1.70 = 85 kr. 16

Construction der Halbschattengrenzen der Flächen zweiten Grades unter Voraussetzung von Kugelbeleuchtung. Von Prof. Karl Schober. 40 S. mit 2 Tafeln. geh. M. 1.30 = 65 kr. 31

Die analogen Kreise von Feuerbach u. Spieker. Von Prof. Karl Ebmer. 27 S. und 1 Taf. geh. 90 Pf. = 45 kr. 32

Centrale Fixation. Ein Protest gegen die Willkür im perspectivischen Projicieren. Von Prof. H. Mayer. 11 S. mit 1 Tafel. geh. 60 Pf. = 30 kr. 37

Über gewisse Curven, die bei Scharen confocaler Kegelschnitte auftreten. Von Prof. Dr. K. Habart. 24 S. geh. 50 Pf. = 25 kr. 68

Mathematisch-physikalische Abhandlungen. Von Prof. J. Dvořák. 23 S. geh. 50 Pf. = 25 kr. 78

Trigonometrisch-stereometrisches Übungsmaterial für die Octava. Von Prof. A. Jelinek. 33 S. geh. 70 Pf. = 35 kr. 9[illegible]

Aufgaben über ebenflächige Körper, deren Darstellung, ebene und gegenseitige Schnitte. Von Prof. W. Hanaček. 19 S. geh. 50 Pf. = 25 kr. 104

Physik und Chemie.

Theorie der stationären elektrischen Ströme auf Grundlage der Kirchhoff'schen Untersuchungen. Von Prof. A. Sänger. 41 S. mit 1 Tafel. geh. 1 M. = 50 kr. 65

Begriff und Problem der Materie. Eine historisch-kritische Studie. Von Prof. A. Ehrenberger. 40 S. geh. 90 Pf. = 45 kr. 40

Zur Strahlenbrechung im Prisma. Strahlengang und Bild von Leuchtenden zur Prismenkante parallelen Geraden. Von Prof. Heinr. R. v. Jettmar. 43 S. mit 1 Tafel. geh. M. 1.20 = 60 kr. 43

Die Entwicklung der Lehre von der Dispersion des Lichtes. Von Prof. Dr. E. Maiss. 41 S. geh. 90 Pf. = 45 kr. 74

Theorie der Interferenzerscheinungen an dicken Platten. Von Prof. Carl Wihlidal. 20 S. mit 1 Tafel. geh. 70 Pf. = 35 kr. 101

Mathematisch-physikalische Abhandlungen. Von Prof. J. Dvořák. 23 S. geh. 50 Pf. = 25 kr. 78

Über die Entdeckung von Elementen. Von Prof. Dr. C. Rothe. 16 S. geh. 40 Pf. = 20 kr. 30

Die wichtigsten Kalender der Gegenwart. Eine Darstellung des gesammten Kalenderwesens von Prof. W. Knobloch. 90 S. geh. M. 1.80 = 90 kr. 111

Naturgeschichte.

Studien über die Descendenz-Theorie. Von Ludw. Hodoly. 41 S. geh. 90 Pf. = 45 kr. 113

Das Gesetz der Befruchtung in der organischen Natur. Von Prof. Dr. E. Formánek. 26 S. geh. 60 Pf. = 30 kr. 6

Neue „merkwürdige Punkte des Dreieckes“.

Die nachstehenden Sätze beziehen sich ausschliesslich auf zwei Dreiecke, von denen das zweite die Mittelpunkte der den Seiten des ersteren Dreieckes anbeschriebenen Kreise zu Eckpunkten hat. Die Rechnung ist mittels trimetrischer Koordinaten geführt, und wurde „Salmon George, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, frei bearbeitet von Dr. W. Fiedler“, benützt.

Dem Verfasser sind die folgenden Sätze, soweit er in der einschlägigen Literatur Umschau halten konnte, nirgends begegnet, und dürften dieselben sohin — wenigstens in ihrer weitaus überwiegenden Mehrzahl — als „neue“ bezeichnet werden.

I.

1. Die Geraden, welche die Mittelpunkte der den Seiten eines Dreieckes anbeschriebenen Kreise mit den Punkten verbinden, in welchen der dem Dreiecke eingeschriebene Kreis die Seiten berührt, gehen durch einen Punkt.

Das Fundamentaldreieck sei $A_1\ A_2\ A_3$, die Mittelpunkte der den Seiten desselben anbeschriebenen Kreise seien $E_1\ E_2\ E_3$, der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises E_0. Bezeichnet man die Radien der Kreise $E_1\ E_2\ E_3$ bezüglich mit $r_1\ r_2\ r_3$, so sind die Koordinaten der Mittelpunkte dieser Kreise, bezogen auf das Fundamentaldreieck $A_1\ A_2\ A_3$

$$\begin{matrix} -r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & -r_2 & r_3 \\ r_1 & r_2 & -r_3. \end{matrix}$$

Die Punkte, in welchen der dem Dreiecke eingeschriebene Kreis die Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 berührt, seien (Fig. 1) $R_0\ S_0\ T_0$. Die Koordinaten dieser Punkte sind

$$\begin{matrix} 0 & 2r_0\cos^2\frac{1}{2}A_3 & 2r^0\cos^2\frac{1}{2}A_2 \\ 2r_0\cos^2\frac{1}{2}A_3 & 0 & 2r_0\cos^2\frac{1}{2}A_1 \\ 2r_0\cos^2\frac{1}{2}A_2 & 2r_0\cos^2\frac{1}{2}A_1 & 0\quad, \end{matrix}$$

wo r_0 den Radius des eingeschriebenen Kreises bezeichnet.

Als Gleichung der Geraden $E_1 R_0$ hat man nun

$$\begin{vmatrix} x_1 & -r_1 & 0 \\ x_2 & r_1 & 2r_0 \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 \\ x_3 & r_1 & 2r_0 \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} x_1 & -1 & 0 \\ x_2 & 1 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 \\ x_3 & 1 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}$$

$$= x_1 (\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_2) + x_2 \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - x_3 \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0.$$

Ebenso findet man

$$E_2 S_0 \equiv - x_1 \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + x_2 (\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_1) + x_3 \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0,$$

$$E_3 T_0 \equiv x_1 \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 - x_2 \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + x_3 (\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_2) = 0.$$

Diese drei Geraden gehen durch einen Punkt, wenn die Determinante der Koëfficienten der Unbekannten gleich Null ist. Diese Determinante ist nun

$$\begin{vmatrix} \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 \\ -\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 & -\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 \\ \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 & -\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 0 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 & -\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 \\ -\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 & -\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 & 0 \\ \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 & 0 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \left[\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 \cos^2\tfrac{1}{2}A_3\right] = 0.$$

Es gehen mithin durch einen Punkt

$$E_1 R_0$$
$$E_2 S_0$$
$$E_3 T_0,$$

dieser Punkt möge mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet werden.

2. Der Punkt $\mathfrak{A}$ liegt mit den Mittelpunkten der dem Fundamentaldreiecke ein- und umgeschriebenen Kreise auf einer Geraden.

Sind die Gleichungen zweier Geraden in der Form gegeben

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 = 0,$$

so werden durch die Koordinaten des Schnittpunktes derselben ausgedrückt durch

$$\frac{M}{R} (a_2 a'_3 - a'_2 a_3)$$

$$\frac{M}{R} (a_3 a'_1 - a'_3 a_1)$$

$$\frac{M}{R} (a_1 a'_2 - a'_1 a_2),$$

wo M den doppelten Flächeninhalt des Fundamentaldreieckes mit den Seiten $s_1\ s_2\ s_3$ bedeutet, und

$$R = \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{vmatrix} = \frac{s_3}{\sin A_3} \begin{vmatrix} \sin A_1 & \sin A_2 & \sin A_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{vmatrix} \text{ ist.}$$

Aus den Gleichungen für E_1R_0 und E_2S_0 findet man nun für die Koordinaten des Punktes $\mathfrak{A}$ die Werte

$$\begin{aligned} a_2a'_3 - a'_2a_3 &= \cos^2\tfrac{1}{2}A_3\,(-\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_3) \\ a_3a'_1 - a'_3a_1 &= \cos^2\tfrac{1}{2}A_3\,(\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - \cos_2\tfrac{1}{2}A_2 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_3) \\ a_1a'_2 - a'_1a_2 &= \cos^2\tfrac{1}{2}A_3\,(\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_3), \end{aligned}$$

oder — wobei der konstante Faktor $2\cos^2\frac{1}{2}A_3$ weggelassen ist —

$$\begin{gathered} \sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ \cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ \cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3. \end{gathered}$$

Das R in obiger Formel hat den Ausdruck

$$R = \frac{s_3}{\sin A_3} \begin{vmatrix} \sin A_1 & \sin A_2 & \sin A_3 \\ \cos^2\frac{1}{2}A_2 + \cos^2\frac{1}{2}A_3 & \cos^2\frac{1}{2}A_2 & -\cos^2\frac{1}{2}A_3 \\ -\cos^2\frac{1}{2}A_1 & \cos^2\frac{1}{2}A_3 - \cos^2\frac{1}{2}A_1 & \cos^2\frac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{s_2}{\sin A_3} \begin{vmatrix} \sin A_1 + \sin A_2 - \sin A_3 & 2\sin\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_2 & 2\sin\frac{1}{2}A_3\cos\frac{1}{2}A_3 \\ 2\cos^2\frac{1}{2}A_2 & \cos^2\frac{1}{2}A_2 & -\cos^2\frac{1}{2}A_3 \\ -2\cos^2\frac{1}{2}A_1 & \cos^2\frac{1}{2}A_3 - \cos^2\frac{1}{2}A_1 & \cos^2\frac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4s_3}{\sin A_3} \begin{vmatrix} \sin\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_3 & \sin\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_3 & \sin\frac{1}{2}A_3\sin\frac{1}{2}A_1\cos\frac{1}{2}A_2 \\ \cos^2\frac{1}{2}A_2 & 0 & -\cos^2\frac{1}{2}A_3 \\ -\cos^2\frac{1}{2}A_2 & \cos^2\frac{1}{2}A_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \frac{4s_3}{\sin A_3}\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\,[&\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 + \sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 \\ &+ \sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_1] \end{aligned}$$

$$= \frac{4s_3}{\sin A_3}\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3\,(1-2\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3).$$

Die Koordinaten von E_0 und M — dem Mittelpunkte des umgeschriebenen Kreises — sind bezüglich

$$\begin{matrix} 1 & \text{und} & \cos A_1 \\ 1 & & \cos A_2 \\ 1 & & \cos A_3. \end{matrix}$$

$\mathfrak{A}$, E_0 und M liegen auf einer Geraden, wenn

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{1}{2}A_1\cos\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_3 & \cos\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_3 & \cos\frac{1}{2}A_1\cos\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ \cos A_1 & \cos A_2 & \cos A_3 \end{vmatrix}$$

gleich Null ist. Dies ist aber der Fall, denn wenn man die dritte Vertikalreihe von der ersten und zweiten Kolonne subtrahirt und den gemeinschaftlichen Faktor heraushebt, so kommt

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Der Punkt $\mathfrak{A}$ liegt auf einer Geraden mit dem Schwerpunkte (S) des Fundamentaldreieckes und mit dem Punkt (F), in welchem sich die Verbindungslinien der Punkte $E_1\ E_2\ E_3$ mit den Halbierungspunkten der Seiten $A_2A_3\ A_3A_1\ A_1A_2$ schneiden.

Die Koordinaten der Halbirungspunkte der Seiten des Fundamentaldreieckes, welche mit C_1, C_2, C_3 bezeichnet werden, sind

$$\begin{array}{ccc} 0 & \sin A_3 & \sin A_2 \\ \sin A_3 & 0 & \sin A_1 \\ \sin A_2 & \sin A_1 & 0 \end{array}$$

Und man hat

$$\begin{aligned} E_1C_1 &\equiv \quad x_1 (\sin A_2 - \sin A_3) + x_2 \sin A_2 - x_3 \sin A_3 = 0 \\ E_2C_2 &\equiv - x_1 \sin A_1 + x_2 (\sin A_3 - \sin A_1) + x_3 \sin A_3 = 0 \\ E_3C_3 &\equiv \quad x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 (\sin A_1 - \sin A_2) = 0. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Koordinaten des Punktes F, in dem sich die Geraden schneiden, nämlich

$$\begin{array}{l} \sin A_3 (-\sin A_1 + \sin A_2 + \sin A_3) \\ \sin A_3 \quad (\sin A_1 - \sin A_2 + \sin A_3) \\ \sin A_3 \quad (\sin A_1 + \sin A_2 - \sin A_3), \end{array}$$

oder — mit Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors $4\sin A_3$ —

$$\begin{array}{l} \cos\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \\ \sin\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \\ \sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3. \end{array}$$

Das R in der allgemeinen Koordinaten-Formel hat für den Punkt F den Wert

$$R' \equiv \frac{8s_3}{\sin A_3} \sin A_3 \sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 \cos^2\tfrac{1}{2}A_3.$$

Die Koordinaten des Schwerpunktes S sind

$$\begin{array}{l} \sin A_2 \sin A_3 \\ \sin A_3 \sin A_1 \\ \sin A_1 \sin A_2. \end{array}$$

Die Entwicklung der Determinante der Koordinaten von $\mathfrak{A}$, S und F gibt Null, mithin liegen diese Punkte auf einer Geraden.

4. Bezeichnet M' den Mittelpunkt des durch $E_1\ E_2\ E_3$ gehenden Kreises und K den Schnittpunkt von $A_1R_0\ A_2S_0\ A_3T_0$, so besteht die Beziehung

$$\frac{\mathfrak{A}E_0}{\mathfrak{A}M'} = \frac{\mathfrak{A}K}{\mathfrak{A}F}$$

Durch den Mittelpunkt des durch $E_1\ E_2\ E_3$ gehenden Kreises gehen die von diesen Punkten auf $A_2A_3\ A_3A_1\ A_1A_2$ gefällten Senkrechten. Bezeichnet man nun die Punkte, in welchen die Kreise $E_1\ E_2\ E_3$ die Seiten $A_2A_3\ A_3A_1\ A_1A_2$ berühren mit (Fig. 1)

$$\begin{matrix} R_1 & S_1 & T_1 \\ R_2 & S_2 & T_2 \\ R_3 & S_3 & T_3, \end{matrix}$$

so gehen also durch M' die Geraden

$$E_1R_1 \quad E_2S_2 \quad E_3T_3.$$

Die Koordinaten von R_1 S_2 T_3 sind

$$\begin{matrix} 0 & 2r_2\sin^2\frac{1}{2}A_3 & 2r_3\sin^2\frac{1}{2}A_3 \\ 2r_1\sin^2\frac{1}{2}A_3 & 0 & 2r_3\sin^2\frac{1}{2}A_1 \\ 2r_1\sin^2\frac{1}{2}A_2 & 2r_2\sin^2\frac{1}{2}A_1 & 0 \end{matrix},$$

und es ist

$$\begin{aligned} E_1R_1 &\equiv x_1(\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 - \sin^2\tfrac{1}{2}A_3) + x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 - x_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0 \\ E_2S_2 &\equiv - x_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 + x_2(\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 - \sin^2\tfrac{1}{2}A_1) + x_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0 \\ E_3T_3 &\equiv x_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 - x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 + x_3(\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 - \sin^2\tfrac{1}{2}A_2) = 0. \end{aligned}$$

Daraus bestimmt sich der Punkt M' durch

$$\begin{matrix} 4\sin^2\frac{1}{2}A_3\,(1-2\sin\frac{1}{2}A_1\cos\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_3) \\ 4\sin^2\frac{1}{2}A_3\,(1-2\cos\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_3) \\ 4\sin^2\frac{1}{2}A_3\,(1-2\cos\frac{1}{2}A_1\cos\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3). \end{matrix}$$

Das R in der allgemeinen Formel — es möge mit R_1 bezeichnet werden — hat den Wert

$$R_1 = \frac{s_3}{\sin A_3}\sin^2\tfrac{1}{2}A_3\sin A_1\sin A_2\sin A_3.$$

Bezeichnet man die Koordinaten von $\mathfrak{A}$ (Nr. 2), Kürze halber, mit

$$m \quad n \quad p,$$

so sind jene von M'

$$1-2m \quad 1-2n \quad 1-2p.$$

Man hat nun

$$\mathfrak{A}E_0^2 = \left(\frac{s_1s_2s_3}{M^2}\right)^2 . \left(2\frac{M}{R}\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\right)^2 . r_0^2 . \varDelta,$$

$$\mathfrak{A}M'^2 = \left(\frac{s_1s_2s_3}{M^2}\right)^2 \left(2\frac{M}{R}\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\right)^2 \left(\frac{M}{R_1}\sin^2\tfrac{1}{2}A_3\right)^2 \varDelta_1.$$

In diesen Formeln ist

$$r_0 = \frac{M}{\frac{4s_3}{\sin A_3}\cos\frac{1}{2}A_1\cos\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_3},$$

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & -\cos A_3 & -\cos A_2 & m & 1 \\ -\cos A_3 & 1 & -\cos A_1 & n & 1 \\ -\cos A_2 & -\cos A_1 & 1 & p & 1 \\ m & n & p & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Für $\varDelta_1$ hat man einen analogen Ausdruck. Derselbe ist aber augenscheinlich gleich $\varDelta$.

Nach Einsetzung der Werthe für R und R_1 ergibt sich

$$\frac{\mathfrak{A}E_0}{\mathfrak{A}M'} = 2\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3.$$

Der Punkt K hat die Koordinaten

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_3$$
$$\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_1$$
$$\cos^2\tfrac{1}{2}A_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_2.$$

Der gemeinschaftliche Nenner derselben — er heisse R_2 — ist

$$R_2=\frac{s_3}{\sin A_3}\cos^3\tfrac{1}{2}A_1\cos^3\tfrac{1}{2}A_2\cos^3\tfrac{1}{2}A_3.$$

Um das Verhältnis von $\mathfrak{A}K$ und $\mathfrak{A}F$ zu bilden, hat man

$$\frac{\mathfrak{A}K}{\mathfrak{A}F}=\frac{\mathfrak{A}K}{\mathfrak{A}S}\cdot\frac{\mathfrak{A}S}{\mathfrak{A}F}$$

S — der Schwerpunkt des Fundamentaldreieckes — wird bestimmt durch

$$\sin A_2\sin A_3$$
etc.

und

$$R_3=\frac{3s_3}{\sin A_3}.\sin A_1\sin A_2\sin A_3.$$

Es ist nun

$$\mathfrak{A}K^2=\left(\frac{s_1s_2s_3}{M^2}\right)^2\left(2\frac{M}{R}\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\right)^2\left(\frac{M}{R_2}\right)^2\Delta_2,$$

$$\mathfrak{A}S^2=\left(\frac{s_1s_2s_3}{M^2}\right)^2\left(2\frac{M}{R}\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\right)^2\left(\frac{M}{R_3}\right)^2\Delta_3.$$

Δ_2 und Δ_3 werden in analoger Weise gebildet wie oben. Es ist aber

$$\Delta_3=4^2\Delta_2,$$

wie man ersieht, wenn man die Koordinatenwerte für $\mathfrak{A}$ von jenen für K subtrahirt. Demnach folgt

$$\frac{\mathfrak{A}K}{\mathfrak{A}S}=\frac{R_3}{4R_2}=\frac{6\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3}{\cos^2\tfrac{1}{2}A_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_3}.$$

Ferner ist — den Wert von R' siehe in Nr. 3 —

$$\mathfrak{A}F^2=\left(\frac{s_1s_2s_3}{M^2}\right)^2\left(2\frac{M}{R}\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\right)^2\left(4\frac{M}{R'}\sin A_3\right)^2$$
$$\times(\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3)^2(\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3)^2\Delta_4,$$

$$\mathfrak{A}S^2=\left(\frac{s_1s_2s_3}{M^2}\right)^2\left(2\frac{M}{R}\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\right)^2\left(\frac{M}{R_3}\right)$$
$$\times(\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3)^2(\sin A_1\sin A_2\sin A_3)^2\Delta_5.$$

In Δ_4 und Δ_5 scheinen, bezüglich, die Koordinaten auf

$$\tan\tfrac{1}{2}A_1\qquad\cot\tfrac{1}{2}A_1$$
etc.

und

$$\tan\tfrac{1}{2}A_1\qquad\frac{1}{\sin A_1}$$

Subtrahirt man im Δ_5 die Glieder der vorletzten Reihe von denen der letzten, so ergibt sich, dass

$$\Delta_4=2^2.\Delta_5.$$

Indem man die Werte von R' und R_3 einsetzt und reduzirt, findet man

$$\frac{\mathfrak{A}S}{\mathfrak{A}F} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}A_1 \cos^2\frac{1}{2}A_2 \cos^2\frac{1}{2}A_3}{3}$$

Demnach ist

$$\frac{\mathfrak{A}K}{\mathfrak{A}F} = \frac{\mathfrak{A}K}{\mathfrak{A}S} \cdot \frac{\mathfrak{A}S}{\mathfrak{A}F} = 2\sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 .$$

Oder da auch

$$\frac{\mathfrak{A}E_0}{\mathfrak{A}M'} = 2\sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 ,$$

$$\frac{\mathfrak{A}E_0}{\mathfrak{A}M'} = \frac{\mathfrak{A}K}{\mathfrak{A}F}$$

5. Die Geraden $\mathfrak{A}E_1$ $\mathfrak{A}E_2$ $\mathfrak{A}E_3$ werden von den Seiten des Fundamentaldreieckes A_2A_3 A_3A_1 A_1A_2 in demselben Verhältnisse geschnitten, so dass also

$$\frac{\mathfrak{A}R_0}{R_0E_1} = \frac{\mathfrak{A}S_0}{S_0E_2} = \frac{\mathfrak{A}T_0}{T_0E_3}.$$

Die Radien der Berührungskreise E_1 E_2 E_3 haben die Werte

$$r_1 = \frac{M}{\frac{s_3}{\sin A_3}(-\sin A_1 + \sin A_2 + \sin A_3)} = \frac{M}{\frac{4s_3}{\sin A_3}\cos\frac{1}{2}A_1 \sin\frac{1}{2}A_2 \sin\frac{1}{2}A_3}$$

$$r_2 = \frac{M}{\frac{4s_3}{\sin A_3} \cdot \sin\frac{1}{2}A_1 \cos\frac{1}{2}A_2 \sin\frac{1}{2}A_3}$$

$r_3 =$ etc.

Demnach ist

$$r_1 : r_2 : r_3 = \tan\tfrac{1}{2}A_1 : \tan\tfrac{1}{2}A_2 : \tan\tfrac{1}{2}A_3 .$$

Die von dem Punkte $\mathfrak{A}$ auf A_2A_3 A_3A_1 A_1A_2 gefällten Senkrechten — die Koordinaten von $\mathfrak{A}$ — verhalten sich aber auch wie

$$\tan\tfrac{1}{2}A_1 : \tan\tfrac{1}{2}A_2 : \tan\tfrac{1}{2}A_3 .$$

Daraus folgt, dass, wenn die Koordinaten von $\mathfrak{A}$ mit x_1 x_2 x_3 bezeichnet werden,

$$x_1 : x_2 : x_3 = r_1 : r_2 : r_3 .$$

Es muss also auch

$$x_1 : r_1 = x_2 : r_2 = x_3 : r_3$$

sein und folglich

$$\frac{\mathfrak{A}R_0}{R_0E_1} = \frac{\mathfrak{A}S_0}{S_0E_2} = \frac{\mathfrak{A}T_0}{T_0E_3}.$$

II.

6. Verbindet man die Fusspunkte der Höhen des Fundamentaldreieckes mit den Mittelpunkten der äusseren Berührungskreise durch Gerade, so schneiden sich diese in einem Punkt — H'.

Für die Verbindungslinien der Fusspunkte der Höhen mit den Punkten E_1 findet man

$$\begin{aligned} E_1H_1 &\equiv x_1(\cos A_2 - \cos A_3) + x_2\cos A_2 - x_3\cos A_3 = 0 \\ E_2H_2 &\equiv - x_1\cos A_1 + x_2(\cos A_3 - \cos A_1) + x_3\cos A_2 = 0 \\ E_3H_3 &\equiv x_1\cos A_1 - x_2\cos A_2 + x_3(\cos A_1 - \cos A_2) = 0. \end{aligned}$$

Die Determinante der Koëfficienten ist Null, mithin gehen diese Geraden durch einen Punkt (Fig. 2).

7. Der Punkt H' liegt auf der Geraden $\mathfrak{A}E_0$.

Die Koordinaten dieses Punktes sind

$$\cos A_3(-\cos A_1 + \cos A_2 + \cos A_3)$$
u. s. w.

Oder, wenn der gemeinsame Faktor $\cos A_3$ wegbleibt,

$$\begin{aligned} &-1 + 4\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ &-1 + 4\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ &-1 + 4\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3. \end{aligned}$$

Diese Werte haben den gemeinschaftlichen Nenner

$$R \equiv -\frac{4s_3}{\sin A_3}\cos A_3 . \cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3\,(-1 + 4\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3).$$

Ein Vergleich obiger Werte mit den Koordinaten des Punktes $\mathfrak{A}$ überzeugt von der Richtigkeit des Satzes.

Es liegen sohin auf einer Geraden die Punkte (Fig. 1)

$$H'\ \mathfrak{A}\ E_0\ M \text{ und } M'.$$

8. Es schneiden sich in einem Punkt — $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ —

$$\begin{array}{ccc} E_1R_0 & E_1R_3 & E_1R_2 \\ E_2S_3 & E_2S_0 & E_2S_1 \\ E_3T_2 & E_3T_1 & E_3T_0. \end{array}$$

Die Lage der Punkte R_0 S_3 T_2 ist bestimmt durch

$$\begin{array}{ccc} 0 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 \\ \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 & 0 & -\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 \\ \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 & -\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 & 0 \end{array}.$$

Dann ist

$$E_1R_0 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & -1 & 0 \\ x_2 & 1 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 \\ x_3 & 1 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ u. s. w.}$$

Oder

$$E_1R_0 \equiv x_1(\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_3) + x_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - x_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0$$
$$E_2S_3 \equiv x_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 + x_2(\sin^2A_1 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_3) + x_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0$$
$$E_3T_2 \equiv x_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 + x_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + x_3(\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_2) = 0.$$

Diese Geraden gehen durch einen Punkt (Fig. 1), denn

$$\begin{vmatrix} \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 & -\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 \\ \sin^2\tfrac{1}{2}A_1 & \sin^2\tfrac{1}{2}A_1 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 \\ \sin^2\tfrac{1}{2}A_1 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 & \sin^2\tfrac{1}{2}A_1 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 \end{vmatrix}$$
$$= 2\begin{vmatrix} 0 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 & -\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 \\ -\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 & \sin^2\tfrac{1}{2}A_1 & 0 \\ -\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 & 0 & \sin^2\tfrac{1}{2}A_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Koordinaten dieses Punktes — $\mathfrak{A}_1$ — aus den Gleichungen für E_2S_3 und E_3T_2 abgeleitet, sind

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A_1(\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_3)$$
$$-\sin^2\tfrac{1}{2}A_1(\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_3)$$
$$-\sin^2\tfrac{1}{2}A_1(\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_3).$$

Oder — ohne den Faktor $\sin^2\tfrac{1}{2}A_1$ —

$$1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3$$
$$-1 + 2\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3$$
$$-1 + 2\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3.$$

Die Koordinaten von R_3 S_0 T_1 sind

$$\begin{matrix} 0 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 & -\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 \\ \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 & 0 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 \\ -\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 & 0 \end{matrix}$$

Und es ist

$$E_1R_3 \equiv x_1(\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_3) + x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 + x_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0$$
$$E_2S_0 \equiv -x_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + x_2(\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_1) + x_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0$$
$$E_3T_1 \equiv x_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 + x_3(\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + \sin^2\tfrac{1}{2}A_2) = 0.$$

Die Determinante ist wieder gleich Null.

Für die Koordinaten des Schnittpunktes — $\mathfrak{A}_2$ — folgt

$$-1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3$$
$$1 + 2\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3$$
$$-1 + 2\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3,$$

wozu noch der gemeinsame Faktor $\sin^2\tfrac{1}{2}A_2$ kommt.

Endlich leitet man aus den Koordinaten von R_2 S_1 T_0

$$\begin{matrix} 0 & -\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 \\ -\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 & 0 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 \\ \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 & 0 \end{matrix},$$

den obigen ähnliche Gleichungen ab für E_1R_2 E_2S_1 E_3T_0 und findet, dass auch diese Geraden durch einen Punkt — $\mathfrak{A}_3$ — gehen, dessen Koordinaten sind

$$-1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3$$
$$-1 + 2\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3$$
$$1 + 2\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3.$$

Dazu kommt noch der Faktor $\sin^2\tfrac{1}{2}A_3$.

*

9. Es schneiden sich in einem Punkt — $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ —

$$\begin{matrix} E_1R_1 & E_1R_2 & E_1R_3 \\ E_2S_1 & E_2S_2 & E_2S_3 \\ E_3T_1 & E_3T_2 & E_3T_3. \end{matrix}$$

Die Koordinaten von $R_1\ S_1\ T_1$ sind

$$\begin{matrix} 0 & -\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 & -\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 \\ \sin^2\tfrac{1}{2}A_3 & 0 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 \\ \sin^2\tfrac{1}{2}A_2 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 & 0 \end{matrix},$$

jene von $R_2\ S_2\ T_2$

$$\begin{matrix} 0 & \sin^2\tfrac{1}{2}A_3 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 \\ -\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 & 0 & -\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 \\ \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 & \sin^2\tfrac{1}{2}A_1 & 0 \end{matrix},$$

endlich diejenigen für $R_3\ S_3\ T_3$

$$\begin{matrix} 0 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 & \sin^2\tfrac{1}{2}A_2 \\ \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 & 0 & \sin^2\tfrac{1}{2}A_1 \\ -\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 & -\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 & 0 \end{matrix}.$$

Die Gleichungen der fraglichen Geraden haben die Form

$$\begin{aligned} E_1R_1 &\equiv x_1(\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 - \sin^2\tfrac{1}{2}A_3) + x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 - x_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0 \\ E_2S_1 &\equiv x_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + x_2(\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + \sin^2\tfrac{1}{2}A_3) + x_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0 \\ E_3T_1 &\equiv x_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 + x_3(\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + \sin^2\tfrac{1}{2}A_2) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1R_2 &\equiv x_1(\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + \sin^2\tfrac{1}{2}A_3) + x_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + x_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0 \\ E_2S_2 &\equiv -x_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 + x_2(\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 - \sin^2\tfrac{1}{2}A_1) + x_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0 \\ E_3T_2 &\equiv x_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 + x_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + x_3(\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + \sin^2\tfrac{1}{2}A_1) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1R_3 &\equiv x_1(\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 + \sin^2\tfrac{1}{2}A_2) + x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 + x_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0 \\ E_2S_3 &\equiv x_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 + x_2(\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_3) + x_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0 \\ E_3T_3 &\equiv x_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 - x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 + x_3(\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 - \sin^2\tfrac{1}{2}A_2) = 0. \end{aligned}$$

Bildet man die Determinante der Koëfficienten, indem man die in einer Gruppe befindlichen Gleichungen als zusammengehörig betrachtet, so findet man dieselben gleich Null. Es gehen also jene Geraden zu je drei durch einen Punkt. Diese mögen mit $\mathfrak{B}_1\ \mathfrak{B}_2\ \mathfrak{B}_3$ bezeichnet werden.

Die Koordinaten dieser Punkte sind bezüglich

$$\begin{matrix} -1 + \sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ \cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ \cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3, \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ -1 + \cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ \cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3, \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ \cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ -1 + \cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3. \end{matrix}$$

Zu diesen Werten treten bezüglich noch die Faktoren $-\cos^2\tfrac{1}{2}A_1$, $-\cos^2\tfrac{1}{2}A_2$, $-\cos^2\tfrac{1}{2}A_3$.

Als Nenner in den Koordinaten von $\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3$ treten bezüglich auf die Ausdrücke

$$-\frac{4s_3}{\sin A_3}\cos^2\tfrac{1}{2}A_1.\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3\,(1-2\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3),$$
$$-\frac{4s_3}{\sin A_2}\cos^2\tfrac{1}{2}A_2.\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3\,(1-2\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3),$$
$$-\frac{4s_3}{\sin A_3}\cos^2\tfrac{1}{2}A_3.\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3\,(1-2\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3).$$

10. Es gehen durch einen Punkt die Geraden

$$\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_1$$
$$\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{B}_2$$
$$\mathfrak{A}_3\,\mathfrak{B}_3.$$

Setzt man, der Kürze halber,

$$\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3=a$$
$$\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3=b$$
$$\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3=c,$$

so stellt sich die Gleichung von $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ dar in der Form

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\equiv\begin{vmatrix} x_1 & 1+2a & -1+a\\ x_2 & -1+2b & b\\ x_3 & -1+2c & c\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} x_1 & 3 & -1+a\\ x_2 & -1 & b\\ x_3 & -1 & c\end{vmatrix}=0.$$

Oder

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\equiv x_1\,(c-b)+x_2\,(3c-1+a)+x_3\,(-3b+1-a)=0.$$

In ähnlicher Weise folgt

$$\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\equiv x_1\,(-3c+1-b)+x_2\,(a-c)+x_3\,(3a-1+b)=0,$$
$$\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\equiv x_1\,(3b-1+c)+x_2\,(-3a+1-c)+x_3\,(b-a)=0.$$

Die Determinante der Koëfficienten dieser Gleichungen ist

$$\begin{vmatrix} c-b & 3c-1+a & -3b+1-a\\ -3c+1-b & a-c & 3a-1+b\\ 3b-1+c & -3a+1-c & b-a\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} c-b & 3c-1+a & -3b+1-a\\ -c+b & c-a & -b+a\\ 3b-1+c & -3a+1-c & b-a\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} 0 & 4c-1 & -4b+1\\ -c+b & c-a & -b+a\\ 4b-1 & -4a+1 & 0\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} 0 & c-b & -4b+1\\ -c+b & 0 & -b+a\\ 4b-1 & b-a & 0\end{vmatrix}$$

$$= (b-c)(b-a)(-4b+1) + (4b-1)(c-b)(a-b) = 0.$$

Also gehen jene drei Geraden durch einen Punkt.

In Fig. 1 sind diese Geraden nicht gezeichnet.

11. Der Durchschnittspunkt der Geraden $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{A}_2B_2$ $\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3$ ist identisch mit dem Punkt H'.

Für den Durchschnittspunkt jener Geraden hat man, unter Beibehaltung der abkürzenden Bezeichnungen a, b, c in Nr. 10,

$$a_2a'_3 - a'_2a_3 = (-1+4a)(2c+a+b-1)$$
$$= (-1+4\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3)\sin\tfrac{1}{2}A_3\cos(\tfrac{1}{2}A_1-\tfrac{1}{2}A_2),$$
$$a_3a'_1 - a'_3a_1 = (-1+4b)(2c+a+b-1)$$
$$= (-1+4\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3)\sin\tfrac{1}{2}A_3\cos(\tfrac{1}{2}A_1-\tfrac{1}{2}A_2),$$
$$a_1a'_2 - a'_1a_2 = (-1+4c)(2c+a+b-1).$$
$$= (-1+4\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3)\sin\tfrac{1}{2}A_3\cos(\tfrac{1}{2}A_1-\tfrac{1}{2}A_2).$$

Die Koordinaten von H' sind aber (Nr. 7)

$$-1+4\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3$$
etc.

Diesen Werten sind aber die obigen proportional, oder H' ist eben der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$.

12. Es schneiden sich in einem Punkt — N'_1 N'_2 N'_3 —

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \\ A_2A_3 & A_3A_1 & A_1A_2 \\ E_2E_3 & E_3E_1 & E_1E_2. \end{matrix}$$

$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ wird dargestellt durch

$$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3 = \begin{vmatrix} x_1 & -1+2\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 & -1+2\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ x_2 & 1+2\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 & -1+2\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ x_3 & -1+2\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 & 1+2\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & 0 & -1+2\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ x_2 & -2 & -1+2\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ x_3 & 2 & 1+2\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ 2\begin{vmatrix} x_1 & 0 & -1 \\ x_2 & -1 & -1 \\ x_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 4\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \tan\tfrac{1}{2}A_1 \\ x_2 & -1 & \tan\tfrac{1}{2}A_2 \\ x_3 & 1 & \tan\tfrac{1}{2}A_3 \end{vmatrix} \right\} = 0.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Gerade geht mithin durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & -1 \\ x_2 & -1 & -1 \\ x_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

und

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & \tan\tfrac{1}{2}A_1 \\ x_2 & -1 & \tan\tfrac{1}{2}A_2 \\ x_3 & 1 & \tan\tfrac{1}{2}A_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Erstere Gleichung kann auch geschrieben werden

$$x_2 + x_3 = 0$$

und stellt die Gerade E_2E_3 dar. Letztere ist die Gleichung der Geraden, welche den Schnittpunkt von A_2A_3 und E_2E_3 mit dem Punkt $\mathfrak{A}$ verbindet, denn der Schnittpunkt dieser Geraden hat die Koordination

$$\begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}$$

Es gehen also $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ A_2A_3 E_2E_3 durch einen Punkt.

Der Beweis für die beiden andern Fälle gestaltet sich ähnlich.

13. Die Geraden

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}_1 A_1 \\ \mathfrak{A}_2 A_2 \\ \mathfrak{A}_3 A_3 \end{matrix}$$

gehen durch den Mittelpunkt (M') des dem Dreiecke $E_1E_2E_3$ umgeschriebenen Dreieckes.

Es liegen nämlich je auf einer Geraden die Punkte

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}_1 & A_1 & M' \\ \mathfrak{A}_2 & A_2 & M' \\ \mathfrak{A}_3 & A_3 & M', \end{matrix}$$

denn die Determinante der Koordinaten dieser Punkte verschwindet, wie sich unmittelbar aus einem Vergleich der Koordinaten (Nr. 4 und 8) ergibt.

14. Die Geraden

$$\begin{matrix} \mathfrak{B}_1 A_1 \\ \mathfrak{B}_2 A_2 \\ \mathfrak{B}_3 A_3 \end{matrix}$$

gehen durch den Punkt $\mathfrak{A}$.

Es liegen nämlich je auf einer Geraden

$$\begin{matrix} A_1 & \mathfrak{A} & \mathfrak{B}_1 \\ A_2 & \mathfrak{A} & \mathfrak{A}_2 \\ A_3 & \mathfrak{A} & \mathfrak{B}_3, \end{matrix}$$

wovon ein Blick auf die Koordinaten dieser Punkte (Nr. 2 und 9) überzeugt.

15. Die Geraden

$$\begin{matrix} M'\mathfrak{A}_1 & M'\mathfrak{B}_1 & E_1\mathfrak{A}_1 & A_1\mathfrak{B}_1, \\ M'\mathfrak{A}_2 & M'\mathfrak{B}_2 & E_2\mathfrak{A}_2 & A_2\mathfrak{B}_2, \\ M'\mathfrak{A}_3 & M'\mathfrak{B}_3 & E_3\mathfrak{A}_3 & A_3\mathfrak{B}_3 \end{matrix}$$

bilden je ein vollständiges Vierseit. Alle drei Vierseite haben $M'\mathfrak{A}$ als gemeinschaftliche innere Diagonale.

Es liegen nämlich je auf einer Geraden (Nr. 13)

$$\begin{matrix} A_1 & \mathfrak{A}_1 & M' \\ & \text{etc.} & , \end{matrix}$$

ebenso (Nr. 14)

$$\begin{matrix} A_1 & \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{A} \\ & \text{etc.} & , \end{matrix}$$

ferner

$$E_1 \quad \mathfrak{B}_1 \quad M',$$

da ja $E_1 R_1$ sowohl durch M' als auch durch E_1 geht, u. s. w.

Zeichnet man sich ein solches Vierseit heraus (Fig. 3), so sieht man, dass sich die inneren Diagonalen desselben — und zwar bei allen drei Vierseiten — im Punkte E_0, die eine dieser Diagonalen — $M'\mathfrak{A}$ — aber und die äussere Diagonale im Punkte H' schneiden, und zwar auch in allen drei Fällen.

Es ist nun das Doppelverhältnis

$$(M'\mathfrak{A}E_0H')$$

harmonisch, oder es ist

$$\frac{M'E_0}{E_0\mathfrak{A}} = \frac{M'H'}{\mathfrak{A}H'}.$$

Betreff der in Rede stehenden drei Vierseite ist noch hervorzuheben, dass die Punkte E_i auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M', und die Punkte A_i auf einem Kreis, dessen Centrum der Halbierungspunkt von $M'E_0$ ist, liegen. Die Collineationsaxen der Vierseite schneiden sich nicht in einem Punkt.

III.

16. Bezeichnet man die Punkte, in welchen sich die Geraden E_0C_1 E_3C_2 E_2C_3, u. s. w. schneiden, mit F_1 F_2 F_3, so gehen durch einen Punkt

$$\begin{matrix} F_1\mathfrak{B}_1 \\ F_2\mathfrak{B}_2 \\ F_3\mathfrak{B}_3\,; \end{matrix}$$

dieser Punkt ist $\mathfrak{A}$.

Aus den Gleichungen für E_0C_1 E_3C_2 E_2C_3 u. s. w. ergeben sich die Koordinaten für F_1 F_2 F_3 in der Form

$$\begin{matrix} 4\cos\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ 4\sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ 4\sin\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3\,, \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 4\sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ 4\cos\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ 4\cos\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3\,, \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 4\sin\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \\ 4\cos\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \\ 4\cos\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3\,. \end{matrix}$$

Für die R hat man bezüglich

$$\frac{16s_3}{\sin A_3} \sin\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3 \left(1 - \sin\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3\right),$$

$$\frac{16 s_3}{\sin A_3} \cos\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3 \, (1 - \cos\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3),$$

$$\frac{16 s_3}{\sin A_3} \cos\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \, (1 - \cos\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3).$$

Es liegen nun je auf einer Geraden die Punkte

$$F_1\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_1 \qquad F_2\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_2 \qquad F_3\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_3,$$

denn subtrahirt man in der Determinante der Koordinaten jene für $\mathfrak{A}$ von den Koordinaten für $\mathfrak{B}_1$, so reduzirt sich dieselbe, mit Weglassung des herausgehobenen Faktors, auf

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3 & \cos\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ 0 & \cos\tfrac{1}{2}A_1 & \sin\tfrac{1}{2}A_1 \\ 0 & \cos\tfrac{1}{2}A_1 & \sin\tfrac{1}{2}A_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\tfrac{1}{2}A_1 & \sin\tfrac{1}{2}A_1 \\ \cos\tfrac{1}{2}A_1 & \sin\tfrac{1}{2}A_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Es liegen also die Punkte $F_1\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_1$ auf einer Geraden. Aehnlich in den beiden andern Fällen.

17. Es gehen durch einen Punkt die Geraden

$$A_1F_1$$
$$A_2F_2$$
$$A_3F_3;$$

dieser Punkt ist $\mathfrak{A}$ (Fig. 2).

Obige Determinante drückt zugleich die Bedingung aus dafür, dass

$$A_1\,F_1\,\mathfrak{A} \qquad A_2\,F_2\,\mathfrak{A} \qquad A_3\,F_3\,\mathfrak{A}$$

auf einer Geraden liegen.

Es liegen sohin dreimal vier Punkte auf einer Geraden, welche sich in $\mathfrak{A}$ schneiden, nämlich

$$A_1\,F_1\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{A}$$
$$A_2\,F_2\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{A}$$
$$A_3\,F_3\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{A}.$$

18. Es gehen durch einen Punkt

$$E_1F_1$$
$$E_2F_2$$
$$E_3F_3,$$

und zwar ist dies derselbe Punkt, in welchem sich die Verbindungslinien der Punkte $A_1\,A_2\,A_3$ mit den Schnittpunkten der Tangenten schneiden, welche in den Eckpunkten des Fundamentaldreieckes an den diesem umgeschriebenen Kreis gelegt werden.

Die Gleichung des dem Fundamentaldreiecke umgeschriebenen Kreises ist

$$x_2x_3\sin A_1 + x_3x_1\sin A_2 + x_1x_2\sin A_3 = 0.$$

Die Gleichungen der Tangenten in den Eckpunkten des Dreieckes sind

$$x_2 \sin A_3 + x_3 \sin A_2 = 0$$
etc.

Die Verbindungslinien der Schnittpunkte der Tangenten mit den gegenüberliegenden Eckpunkten des Dreieckes werden dargestellt durch

$$x_2 \sin A_3 - x_3 \sin A_2 = 0$$
etc.

Für die Koordinaten des Schnittpunktes dieser Geraden hat man

$$\begin{array}{l} \sin A_1 \\ \sin A_2 \\ \sin A_3 . \end{array}$$

Dieser Punkt liegt aber auf $E_i F_i$ (Fig. 4), denn es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{1}{2}A_1 \cos\frac{1}{2}A_1 & -1 & \cos\frac{1}{2}A_1 \cos\frac{1}{2}A_2 \cos\frac{1}{2}A_3 \\ \sin\frac{1}{2}A_2 \cos\frac{1}{2}A_2 & 1 & \sin\frac{1}{2}A_1 \sin\frac{1}{2}A_2 \cos\frac{1}{2}A_3 \\ \sin\frac{1}{2}A_3 \cos\frac{1}{2}A_3 & 1 & \sin\frac{1}{2}A_1 \cos\frac{1}{2}A_2 \sin\frac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\frac{1}{2}A_1 \cos\frac{1}{2}A_1 & -1 & \cos\frac{1}{2}A_1 \sin\frac{1}{2}A_2 \sin\frac{1}{2}A_3 \\ \sin\frac{1}{2}A_2 \cos\frac{1}{2}A_2 & 1 & -\cos\frac{1}{2}A_1 \sin\frac{1}{2}A_2 \sin\frac{1}{2}A_3 \\ \sin\frac{1}{2}A_3 \cos\frac{1}{2}A_3 & 1 & -\cos\frac{1}{2}A_1 \sin\frac{1}{2}A_2 \sin\frac{1}{2}A_3 \end{vmatrix} = 0,$$

da die letzte Kolonne, mit Ausnahme eines gemeinsamen Faktors, identisch mit der zweiten ist. Somit ist der Satz bewiesen.

19. Die Schwerlinien des Dreieckes $E_1 E_2 E_3$ und die von $A_1 A_2 A_3$ durch den Punkt F gezogenen Geraden schneiden sich auf den Seiten des Dreieckes $A_1 A_2 A_3$.

Die Koordinaten von F siehe Nr. 3. Es ist nun

$$\begin{aligned} A_1F &\equiv x_2 \tan\tfrac{1}{2}A_2 - x_3 \tan\tfrac{1}{2}A_3 \\ A_2F &\equiv x_3 \tan\tfrac{1}{2}A_3 - x_1 \tan\tfrac{1}{2}A_1 \\ A_3F &\equiv x_1 \tan\tfrac{1}{2}A_1 - x_2 \tan\tfrac{1}{2}A_2 . \end{aligned}$$

Diese Geraden treffen die Seiten des Fundamentaldreieckes bezüglich in den Punkten (Fig. 5)

$$\begin{array}{ccc} 0 & \tan\frac{1}{2}A_3 & \tan\frac{1}{2}A_2 \\ \tan\frac{1}{2}A_3 & 0 & \tan\frac{1}{2}A_1 \\ \tan\frac{1}{2}A_2 & \tan\frac{1}{2}A_1 & 0 \; . \end{array}$$

Die von $E_1 E_2 E_3$ nach diesen Punkten gezogenen Geraden werden bestimmt durch

$$x_1 (\tan\tfrac{1}{2}A_2 - \tan\tfrac{1}{2}A_3) + x_2 \tan\tfrac{1}{2}A_3 - x_3 \tan\tfrac{1}{2}A_3 = 0$$
etc.

Von diesen Geraden werden die Seiten E_2E_3 E_3E_1 E_1E_2 in den Punkten getroffen

$$\begin{array}{ccc} \cos\frac{1}{2}A_1 & \sin(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1) & -\sin(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2) \\ -\sin(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) & \cos\frac{1}{2}A_2 & \sin(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2) \\ \sin(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) & -\sin(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1) & \cos\frac{1}{2}A_3 . \end{array}$$

Diese Punkte sind nun aber die Halbierungspunkte der Seiten E_2E_3 E_3E_1 E_1E_2, denn sie liegen auf dem Feuerbach'schen Kreis des Dreieckes $E_1E_2E_3$, d. i. auf dem dem Dreiecke $A_1A_2A_3$ umgeschriebenen Kreise.

Die Gleichung dieses Kreises ist nämlich

$$x_2x_3\sin A_1 + x_1x_2\sin A_2 + x_1x_2\sin A_3 = 0.$$

Die obigen Werte genügen aber dieser Gleichung.

IV.

20. Es schneiden sich je in einem Punkt die Geraden

$$\begin{array}{ccc} E_0R_0 & E_3R_3 & E_2R_2 \\ E_3S_3 & E_0S_0 & E_1S_1 \\ E_2T_2 & E_1T_1 & E_0T_0. \end{array}$$

Man hat z. B.

$$E_1T_1 \equiv x_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + x_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 + x_3(\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 - \sin^2\tfrac{1}{2}A_2) = 0,$$
$$E_3R_3 \equiv x_1(\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 - \sin^2\tfrac{1}{2}A_2) + x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 + x_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0,$$
$$E_0S_0 \equiv x_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + x_2(\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_1) - x_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0.$$

Und es ist

$$\begin{vmatrix} \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 & \sin^2\tfrac{1}{2}A_2 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 - \sin^2\tfrac{1}{2}A_2 \\ -\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 & \sin^2\tfrac{1}{2}A_2 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 \\ \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 & -\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}$$
$$= m \begin{vmatrix} 0 & \sin^2\tfrac{1}{2}A_2 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 \\ -\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 & 0 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 \\ \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Mithin gehen diese Geraden durch einen Punkt. Ebenso u. s. w. Diese Punkte sind in Fig. 6 mit N_1 N_2 N_3 bezeichnet.

21. N_1 N_2 N_3 sind die Mittelpunkte der Kreise, welche bezüglich durch E_2 E_3 E_0, E_3 E_1 E_0, E_1 E_2 E_0 gehen. Die Radien dieser drei Kreise sind untereinander und mit dem Radius des dem Dreiecke E_1 E_2 E_3 umschriebenen Kreises gleich gross.

Es ist (Fig. 6) das Dreieck

$$E_1N_3E_2 \cong E_1M'E_2.$$

Mithin ist

$$E_1N_3 = E_1M',$$
$$E_2N_3 = E_2M'.$$

Da aber auch

$$E_1M' = E_2M'$$

ist, so folgt

$$E_1N_3 = E_2N_3 = E_2M'.$$

In gleicher Weise findet man

$$E_2N_1 = N_1E_3 = E_3N_2 = N_2E_1 = E_1N_3 = N_3E_2.$$

Es ist aber auch
$$N_3E_0 = E_2N_1,$$
denn es ist
$$E_2N_3 \perp A_2A_3,$$
$$N_1E_0 \perp A_2A_3,$$
also
$$E_2N_3 \parallel N_1E_0.$$
Ebenso folgt
$$E_2N_1 \parallel N_3E_0.$$

Es ist also $E_0N_3E_2N_1$ ein Parallelogramm, und zwar, da $E_2N_3 = E_2N_1$, ein Rhombus. Ebenso sind Rhomben die Figuren $N_1E_3N_2E_0$ und $N_2E_1N_3E_0$, ferner noch $E_2N_3E_1M'$, $E_1N_2E_3M'$, $E_3N_1E_2M'$. Es sind also in der That die Radien der Kreise $E_0E_1E_2$, $E_0E_2E_3$, $E_0E_3E_1$, $E_1E_2E_3$ gleich gross. E_0 ist der Mittelpunkt des durch N_1 N_2 N_3 gehenden Kreises.

22. Der Feuerbach'sche Kreis des Dreieckes $E_1E_2E_3$ ist zugleich der Feuerbach'sche des Dreieckes $N_1N_2N_0$.

Durch den Feuerbach'schen Kreis des Dreieckes $E_1E_2E_3$ werden die Geraden E_0E_1, u. s. w. in $\mathfrak{M}_1$, u. s. w. (Fig. 6) halbiert. E_0E_1 ist aber, wie N_2N_3 Diagonale des Rhombus $E_0N_2E_1N_3$. Diese halbieren sich gegenseitig, also geht der Feuerbach'sche Kreis des Dreieckes $E_1E_2E_3$ durch die Halbierungspunkte der Seiten N_2N_3, N_3N_1, N_1N_2.

Auch direkt lässt sich beweisen, dass der Schnittpunkt des Feuerbach'schen Kreises und der Geraden E_1A_1, u. s. w. auf N_2N_3 u. s. w. liegt. Aus den in Nr. 20 angegebenen Gleichungen ergeben sich nämlich für die Koordinaten der Punkte N_i folgende Werte

$$\begin{gathered}\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_3\\ \sin^2\tfrac{1}{2}A_1 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_3\\ \sin^2\tfrac{1}{2}A_1 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_3, \text{ u. s. w.}\end{gathered}$$

Oder

$$\begin{gathered}1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3\\ -1 + 2\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3\\ -1 + 2\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3, \text{ u. s. w.}\end{gathered}$$

Die Koordinaten von N_1 N_2 N_3 enthalten noch den bezüglichen Faktor $\sin^2\frac{1}{2}A_1$, $\sin^2\frac{1}{2}A_2$, $\sin^2\frac{1}{2}A_3$. Die Nenner in diesen Ausdrücken stimmen mit jenem der Koordinaten von M' überein, sie sind nämlich beziehungsweise

$$\frac{s_3}{\sin A_3}\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 . \sin A_1\sin A_2\sin A_3,$$

$$\frac{s_3}{\sin A_3}\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 . \sin A_1\sin A_2\sin A_3,$$

$$\frac{s_3}{\sin A_3}\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 . \sin A_1\sin A_2\sin A_3,$$

wie sich das z. B. für N_2 aus der Entwicklung der Determinante ergibt

$$\frac{s_3}{\sin A_3}\begin{vmatrix} \sin A_1 & \sin A_2 & \sin A_3 \\ \cos^2\frac{1}{2}A_1 & \sin^2\frac{1}{2}A_2 & \cos^2\frac{1}{2}A_1 - \sin^2\frac{1}{2}A_2 \\ \cos^2\frac{1}{2}A_3 - \sin^2\frac{1}{2}A_2 & \sin^2\frac{1}{2}A_2 & \cos^2\frac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}.$$

Die Koordinaten von $\mathfrak{M}_1$, u. s. w. ergeben sich aus der Kreisgleichung

$$x_2x_3\sin A_1 + x_3x_1\sin A_2 + x_1x_2\sin A_3 = 0$$

und jener für E_1A_1, u. s. w.

$$x_2 - x_3 = 0.$$

Indem man die beiden Gleichungen verbindet, erhält man eine lineare Gleichung, welche mit $x_2 - x_3 = 0$ für $\mathfrak{M}_1$ die Werte liefert

$$-\sin A_1$$
$$\sin A_2 + \sin A_3$$
$$\sin A_2 + \sin A_3;$$

analog für $\mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{M}_3$.

Dieser Punkt liegt nun auf N_2N_3, denn die Determinante der Koordinaten von $\mathfrak{M}_1$ N_2 N_3 reducirt sich bald auf

$$\begin{vmatrix} 2 - 2\cos^2\frac{1}{2}A_1 & -\sin\frac{1}{2}A_1 \\ \cos^2\frac{1}{2}A_1 - \cos^2\frac{1}{2}A_2 - \cos^2\frac{1}{2}A_3 & \cos\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 - 2\cos^2\frac{1}{2}A_1 & -\sin\frac{1}{2}A_1 \\ -2\sin\frac{1}{2}A_1\cos\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_3 & \cos\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}$$

$$= m\begin{vmatrix} 1 - \cos^2\frac{1}{2}A_1 & -\sin\frac{1}{2}A_1 \\ -\sin\frac{1}{2}A_1 & 1 \end{vmatrix} = m\,(1 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 - \sin^2\tfrac{1}{2}A_1) = 0.$$

23. Der Mittelpunkt des dem Dreiecke $E_1E_2E_3$ umgeschriebenen Kreises ist der Schnittpunkt der Höhen des Dreieckes $N_1N_2N_3$.

Folgt aus der symmetrischen Lage der beiden Dreiecke unmittelbar.

24. Es gehen durch einen Punkt (N) die Geraden

$$N_1A_1$$
$$N_2A_2$$
$$N_3A_3.$$

Die Gleichungen dieser Geraden sind

$$N_1A_1 \equiv x_2(-1+2\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3) - x_3(-1+2\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3) = 0,$$
$$N_2A_2 \equiv x_3(-1+2\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3) - x_1(-1+2\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3) = 0,$$
$$N_3A_3 \equiv x_1(-1+2\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3) - x_2(-1+2\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3) = 0.$$

Die Summe der linken Theile dieser Gleichungen gibt identisch Null, mithin gehen jene Geraden durch einen Punkt (N).

25. Der Punkt N liegt mit $\mathfrak{A}$ und H auf einer Geraden.

Aus den Gleichungen in Nr. 24 ergeben sich für den Schnittpunkt N die Werte.

$$\cos A_2 \cos A_3 - \sin^2 \tfrac{1}{2} A_1 \sin A_2 \sin A_3$$
$$\cos A_3 \cos A_1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} A_2 \sin A_3 \sin A_1$$
$$\cos A_1 \cos A_2 - \sin^2 \tfrac{1}{2} A_3 \sin A_1 \sin A_2.$$

Die Koordinaten von H und $\mathfrak{A}$ sind bezüglich

$$\cos A_2 \cos A_3, \text{ etc.}$$
$$\sin \tfrac{1}{2} A_1 \cos \tfrac{1}{2} A_2 \cos \tfrac{1}{2} A_3, \text{ etc.}$$

Die Determinante der Koordinaten verschwindet, denn subtrahirt man von denjenigen für N die Koordinaten für H und hebt den gemeinsamen Faktor $4 \sin \frac{1}{2} A_1 \sin \frac{1}{2} A_2 \sin \frac{1}{2} A_3$ heraus, so werden zwei Kolonnen einander gleich; mithin ist die Determinante gleich Null.

V.

26 Es gehen je durch einen Punkt

$$\begin{matrix} E_0R_1 & E_3R_1 & E_2R_1 \\ E_3S_2 & E_0S_2 & E_1S_2 \\ E_2T_3 & E_1T_3 & E_0T_3. \end{matrix}$$

Es ist

$$E_0R_1 \equiv x_1(\sin^2 \tfrac{1}{2} A_2 - \sin^2 \tfrac{1}{2} A_3) - x_2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A_2 + x_3 \sin^2 \tfrac{1}{2} A_3 = 0,$$
$$E_3S_2 \equiv -x_1 \sin^2 \tfrac{1}{2} A_1 + x_2(\sin^2 \tfrac{1}{2} A_3 + \sin^2 \tfrac{1}{2} A_1) + x_3 \sin^2 \tfrac{1}{2} A_3 = 0,$$
$$E_2T_3 \equiv -x_1 \sin^2 \tfrac{1}{2} A_1 + x_2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A_2 + x_3(\sin^2 \tfrac{1}{2} A_1 + \sin^2 \tfrac{1}{2} A_2) = 0.$$

Dass diese Geraden durch einen Punkt gehen, folgt aus dem Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} \sin^2 \tfrac{1}{2} A_2 + \sin^2 \tfrac{1}{2} A_3 & -\sin^2 \tfrac{1}{2} A_2 & \sin^2 \tfrac{1}{2} A_3 \\ -\sin^2 \tfrac{1}{2} A_1 & \sin^2 \tfrac{1}{2} A_3 + \sin^2 \tfrac{1}{2} A_1 & \sin^2 \tfrac{1}{2} A_3 \\ -\sin^2 \tfrac{1}{2} A_1 & \sin^2 \tfrac{1}{2} A_1 & \sin^2 \tfrac{1}{2} A_1 + \sin^2 \tfrac{1}{2} A_2 \end{vmatrix}$$
$$= m \begin{vmatrix} 0 & \sin^2 \tfrac{1}{2} A_2 & \sin^2 \tfrac{1}{2} A_3 \\ -\sin^2 \tfrac{1}{2} A_3 & \sin^2 \tfrac{1}{2} A_2 & 0 \\ \sin^2 \tfrac{1}{2} A_2 & 0 & \sin^2 \tfrac{1}{2} A_1 \end{vmatrix} = 0.$$

In Fig. 7 sind diese Punkte mit $\mathfrak{K}_1$ $\mathfrak{K}_2$ $\mathfrak{K}_3$ bezeichnet.

27. Es liegen je auf einer Geraden die Punkte

$$\begin{matrix} N_1 & A_1 & \mathfrak{K}_1 \\ N_2 & A_2 & \mathfrak{K}_2 \\ N_3 & A_3 & \mathfrak{K}_3. \end{matrix}$$

Die Punkte $\mathfrak{K}_1$ $\mathfrak{K}_2$ $\mathfrak{K}_3$ bestimmen sich durch

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A_1 + \sin^2 \tfrac{1}{2} A_2 + \sin^2 \tfrac{1}{2} A_3$$
$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A_1 + \sin^2 \tfrac{1}{2} A_2 - \sin^2 \tfrac{1}{2} A_3$$
$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A_1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} A_2 + \sin^2 \tfrac{1}{2} A_3, \text{ u. s. w.}$$

Die Koordinaten von N_i siehe Nr. 22. Subtrahirt man, in der Determinante der Koordinaten der betreffenden Punkte, die Werte für N_1 von denen für $\mathfrak{K}_1$, so erhält die Unterdeterminante von 1 als Glieder der ersten Vertikalreihe Null. Es liegen demnach u. s. w.

28. Es schneiden sich je in einem Punkt

$$\begin{matrix} E_0R_0 & E_3R_0 & E_2R_0 \\ E_2S_0 & E_0S_0 & E_1S_0 \\ E_3T_0 & E_1T_0 & E_0T_0. \end{matrix}$$

Die Geraden E_0R_0 E_2S_0 E_3T_0 werden dargestellt durch

$$\begin{aligned} E_0R_0 &\equiv \quad x_1(\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_3) - x_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + x_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0 \\ E_2S_0 &\equiv - x_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + x_2(\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_1) + x_3\cos_2\tfrac{1}{2}A_3 = 0 \\ E_3T &\equiv - x_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + x_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + x_3(\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_2) = 0. \end{aligned}$$

Die Koëffizienten der Unbekannten in diesen Gleichungen haben genau dieselbe Form wie in den Gleichungen in Nr. 26, nur dass hier der cos an Stelle von sin tritt, die Determinante ist sohin gleich Null, und die Geraden gehen durch einen Punkt (Fig. 8).

Die Koordinaten dieser Punkte — sie mögen mit $\mathfrak{L}_1$ $\mathfrak{L}_2$ $\mathfrak{L}_3$ bezeichnet werden — sind

$$\begin{aligned} &\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 \\ &\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 \\ &\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_3, \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Oder

$$\begin{aligned} 2 + 2&\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 \\ 2&\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 \\ 2&\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3, \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Zu diesen Koordinaten von $\mathfrak{L}_1$ $\mathfrak{L}_2$ $\mathfrak{L}_3$ kommt noch der Faktor $\cos^2\frac{1}{2}A_3$. Der denselben gemeinsame Nenner (R) ist

$$R \equiv \frac{s_3}{\sin A_3}\begin{vmatrix} \sin A_1 & \sin A_2 & \sin A_3 \\ \cos^2\frac{1}{2}A_2 - \cos^2\frac{1}{2}A_3 & -\cos^2\frac{1}{2}A_2 & \cos^2\frac{1}{2}A_3 \\ -\cos^2\frac{1}{2}A_1 & \cos^2\frac{1}{2}A_3 + \cos^2\frac{1}{2}A_1 & \cos^2\frac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4s_3}{\sin A_3}\begin{vmatrix} \cos\frac{1}{2}A_1\cos\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_3 & \cos\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_3 & \cos\frac{1}{2}A_3\sin\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2 \\ 0 & \cos^2\frac{1}{2}A_2 & \cos^2\frac{1}{2}A_3 \\ -\cos^2\frac{1}{2}A_3 & \cos^2\frac{1}{2}A_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4s_3}{\sin A_3}\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3\,[\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + \sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_2 + \sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_3\cos\tfrac{1}{2}A_3]$$

$$= \frac{4s_3}{\sin A_3}\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3\,[\cos\tfrac{1}{2}A_1 - \cos\tfrac{1}{2}A_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 + \text{etc.}]$$

$$= \frac{4s_3}{\sin A_3}\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 \,.\, \cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3\,(1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3),$$

da

$$-\sin A_1 + \sin A_2 + \sin A_3 = 4\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 \quad \text{ist.}$$

29. Der Mittelpunkt des durch $\mathfrak{L}_1$ $\mathfrak{L}_2$ $\mathfrak{L}_3$ gehenden Kreises ist E_0.

Es lässt sich zunächst beweisen, dass (Fig. 9)

$$\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2 \,/\!/\, E_1E_2, \text{ etc.}$$

ist. Setzt man der Kürze halber

$$\sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 = a$$
$$\cos\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 = b$$
$$\cos\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3 = c$$
$$\sin\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3 = d,$$

so wird die Gleichung von $\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1+a & b \\ x_2 & b & 1+a \\ x_3 & c & d \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$x_1(bd - c - ac) - x_2(d + ad - bc) + x_3(1 + 2a + a^2 - b^2) = 0.$$

Die Bedingung für den Parallelismus dieser Geraden mit E_1E_2, deren Gleichung $x_1 + x_2 = 0$, ist das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} \sin A_1 & \sin A_2 & \sin A_3 \\ bd - c - ac & bc - d - ad & 1 + 2a + a^2 - b^2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Dies ist aber in der That der Fall. Subtrahirt man die erste Kolonne von der zweiten, so reduzirt sich der Ausdruck auf

$$\begin{vmatrix} \sin A_1 - \sin A_2 & \sin A_3 \\ (d-c)(b+1+a) & 1 + 2a + a^2 - b^2 \end{vmatrix}$$

$$= m \begin{vmatrix} 1 & \cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ \cos\tfrac{1}{2}A_3 (b+1+a) & 1 + a + a^2 - b^2 \end{vmatrix}$$

$$= m\,[1 + 2a + (a-b)(a+b) - \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 - (a+b)\cos^2\tfrac{1}{2}A_3],$$

indem man nämlich die Glieder in dem entwickelten Ausdruck passend ordnet. Es ist nun

$$1 + 2a = \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 - 1,$$
$$1 + 2a - \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 = \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - 1,$$
$$(a+b)(a - b - \cos^2\tfrac{1}{2}A_3) = (a+b)(-\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_3)$$
$$= -(a+b).$$

Also wird der Faktor von m

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - 1 - \sin\tfrac{1}{2}A_3\cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)$$
$$= \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - 1 - \cos(\tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{2}A_2)\cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)$$
$$= \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + \sin^2\tfrac{1}{2}A_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 - 1$$
$$= \cos^2\tfrac{1}{2}A_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + \sin^2\tfrac{1}{2}A_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 - 1$$
$$= \sin^2\tfrac{1}{2}A_2 + \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - 1 = 0.$$

Es ist also

$$\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2 \parallel E_1E_2.$$

Ebenso ist $\mathfrak{L}_2\mathfrak{L}_3 \parallel E_2E_3$ und $\mathfrak{L}_3\mathfrak{L}_1 \parallel E_3E_1$.

Allein es ist auch

$$N_1N_2 \parallel E_1E_2.$$

Daraus folgt, dass

$$\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2 \parallel N_1N_2.$$

Nun ist

$$E_0N_1 = E_0N_2,$$

mithin auch

$$E_0\mathfrak{L}_1 = E_0\mathfrak{L}_2.$$

Ebenso würde man durch Rechnung finden, dass

$$E_0\mathfrak{L}_1 = E_0\mathfrak{L}_3$$

ist. Der Punkt E_0 ist sohin von $\mathfrak{L}_1$ $\mathfrak{L}_2$ $\mathfrak{L}_3$ gleich weit entfernt, oder E_0 ist der Mittelpunkt des durch diese Punkte gehenden Kreises.

30. Die Seiten E_2E_3 E_3E_1 E_1E_2 werden beziehungsweise halbiert von

$$\mathfrak{A}\mathfrak{L}_1$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{L}_2$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{L}_3.$$

Die Koordinaten der Halbierungspunkte auf den Seiten des Dreieckes $E_1E_2E_3$ bestimmen sich aus der Gleichung des Feuerbach'schen Kreises eben dieses Dreieckes und jener der Geraden E_2E_3 E_3E_1 E_1E_2. Die Gleichung des Kreises ist, wie schon wiederholt angegeben,

$$x_2x_3\sin A_1 + x_3x_1\sin A_2 + x_1x_2\sin A_3 = 0,$$

die Gleichung von E_2E_3

$$x_2 + x_3 = 0.$$

Aus beiden folgt

$$x_1(\sin A_2 - \sin A_3) + x_2\sin A_1 = 0.$$

Diese und die Gleichung für E_2E_3 liefern als Koordinaten des Halbierungspunktes die Werte

$$\sin A_1$$
$$-\sin A_2 + \sin A_3$$
$$\sin A_2 - \sin A_3.$$

Dieser Punkt liegt nun mit den Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{L}_1$ auf einer Geraden (Fig. 9), denn es ist

$$\begin{vmatrix} \sin A_1 & \sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 & 1+\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 \\ -\sin A_2+\sin A_3 & \cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 & \cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 \\ \sin A_2-\sin A_3 & \cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 & \cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}$$

$$= m\begin{vmatrix} \sin A_1 & \sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 & 1+\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 \\ 0 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 & \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 \\ \sin A_2-\sin A_3 & \cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 & \cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}$$

$$= m'\begin{vmatrix} \sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_1 & \sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 & 1-\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\tfrac{1}{2}A_1\sin(\tfrac{1}{2}A_2-\tfrac{1}{2}A_3) & \cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 & \cos\tfrac{1}{2}A_1\sin(\tfrac{1}{2}A_2-\tfrac{1}{2}A_3) \end{vmatrix}$$

$$= n\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sin(\tfrac{1}{2}A_2-\tfrac{1}{2}A_3) & \sin(\tfrac{1}{2}A_2-\tfrac{1}{2}A_3) \end{vmatrix} = 0.$$

31. Es besteht die Relation

$$\mathfrak{A}E_0 : \mathfrak{A}M' = E_0\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{L}_1 N_1$$
$$= E_0\mathfrak{L}_2 : \mathfrak{L}_2 N_2$$
$$= E_0\mathfrak{L}_3 : \mathfrak{L}_3 N_3 .$$

Es ist, wenn M den doppelten Flächeninhalt des Fundamentaldreieckes bezeichnet, und R_1 und R_2 bezüglich die Nenner in den Koordinatenformeln für die Punkte $\mathfrak{L}_1$ und N_1 sind,

$$\overline{E_0\mathfrak{L}_1}^2 = \left(\frac{s_1 s_2 s_2}{M^2}\right)^2 r_0^2 \left(\frac{M}{R_1}\right)^2 (\cos^2\tfrac{1}{2}A_3)^2 . \varDelta_1 ,$$

$$\overline{E_0 N_1}^2 = \left(\frac{s_1 s_2 s_3}{M^2}\right)^2 r_0^2 \left(\frac{M}{R_2}\right)^2 (\sin^2\tfrac{1}{2}A_3)^2 . \varDelta_2 .$$

In diesen Ausdrücken haben $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$, wenn man

$$\sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 = a$$
$$\cos\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 = b$$
$$\cos\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3 = c$$

setzt, die Werte

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -\cos A_3 & -\cos A_2 & 1 & 2+2a \\ -\cos A_3 & 1 & -\cos A_1 & 1 & 2b \\ -\cos A_2 & -\cos A_1 & 1 & 1 & 2c \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2+2a & 2b & 2c & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\varDelta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\cos A_3 & -\cos A_2 & 1 & 1+2a \\ -\cos A_3 & 1 & -\cos A_1 & 1 & -1+2b \\ -\cos A_2 & -\cos A_1 & 1 & 1 & -1+2c \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1+2a & -1+2b & -1+2c & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Addirt man in $\varDelta_2$ die vorletzte Vertikal- und Horizontal-Reihe zur letzten Vertikal- und Horizontalreihe, so wird

$$\varDelta_2 = \varDelta_1 .$$

Es besteht also das Verhältnis

$$\frac{E_0 N_1}{E_0\mathfrak{L}_1} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}A_3 . R_1}{\cos^2\frac{1}{2}A_3 . R_2} = \frac{4\cos\frac{1}{2}A_1 \cos\frac{1}{2}A_2 \cos\frac{1}{2}A_3 (1 + 2\sin\frac{1}{2}A_1 \sin\frac{1}{2}A_2 \sin\frac{1}{2}A_3)}{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}A_1 \sin\frac{1}{2}A_2 \sin\frac{1}{2}A_3} + 1.$$

Und

$$\frac{E_0 N_1}{E_0\mathfrak{L}_1} - \frac{E_0\mathfrak{L}_1}{E_0\mathfrak{L}_1} = \frac{\mathfrak{L}_1 N_1}{E_0\mathfrak{L}_1} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}A_1 \sin\frac{1}{2}A_2 \sin\frac{1}{2}A_3},$$

oder

$$\frac{E_0\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_1 N_1} = 2\sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 .$$

Es ist aber auch (Nr. 4)

$$\frac{\mathfrak{A}E_0}{\mathfrak{A}M'} = 2\sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3.$$

Es folgt also, dass

$$\frac{\mathfrak{A}E_0}{\mathfrak{A}M'} = \frac{E_0\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_1 N_1} = \frac{E_0\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{L}_2 N_2} = \frac{E_0\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{L}_3 N_3}.$$

32. Es besteht die Beziehung

$$\frac{\mathfrak{A}A_1}{A_1\mathfrak{L}_1} = \frac{\mathfrak{A}A_2}{A_2\mathfrak{L}_2} = \frac{\mathfrak{A}A_3}{A_3\mathfrak{L}_3}.$$

Es sei, Kürze halber,

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3 &= a \\
\cos\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3 &= b \\
\cos\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 &= c \\
\sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 &= d.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\mathfrak{A}A_1^{\,2} = \left(\frac{s_1 s_2 s_3}{M^2}\right)^2 h_1^2 \left(2\frac{M}{R}\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\right)^2 . \Delta_1,$$

$$A_1\mathfrak{L}_1^{\,2} = \left(\frac{s_1 s_2 s_3}{M^2}\right)^2 h_1^2 \left(2\frac{M}{R_1}\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\right)^2 . \Delta_2.$$

In diesen Formeln hat Δ_1 den Wert

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -\cos A_3 & -\cos A_2 & a & 1 \\ -\cos A_3 & 1 & -\cos A_1 & b & 0 \\ -\cos A_2 & -\cos A_1 & 1 & c & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -\cos A_1 & b \\ -\cos A_1 & 1 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -(c^2 + 2bc\cos A_1 + b^2).$$

Δ_2, in welchem die Koordinaten von $\mathfrak{L}_1$ auftreten, hat die Form

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\cos A_3 & -\cos A_2 & 1+d & 1 \\ -\cos A_3 & 1 & -\cos A_1 & c & 0 \\ -\cos A_2 & -\cos A_1 & 1 & b & 0 \\ 1+d & c & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -\cos A_1 & c \\ -\cos A_1 & 1 & b \\ c & b & 0 \end{vmatrix} = -(b^2 + 2bc\cos A_1 + c^2).$$

Es ist also

$$\Delta_2 = \Delta_1.$$

*

Für das Verhältnis der beiden Strecken $\mathfrak{A}A_1$ und $A_1\mathfrak{L}_1$ hat man demnach

$$\frac{\mathfrak{A}A_1}{A_1\mathfrak{L}_1} = \frac{R_1}{R} = \frac{4\cos\frac{1}{2}A_1\cos\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_3\,(1+2\sin\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3)}{4\cos\frac{1}{2}A_1\cos\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_3\,(1-2\sin\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3)}$$
$$= \frac{1+2\sin\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3}{1-2\sin\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3}.$$

Denselben Wert findet man auch für die beiden andern Verhältnisse, da R_1 für $\mathfrak{L}_2$ und $\mathfrak{L}_3$ ebenso gut gilt wie für $\mathfrak{L}_1$, und die Determinanten, wie in dem eben durchgeführten Fall, sich gegenseitig tilgen. Unter Beibehaltung der abkürzenden Bezeichnungen a, b, c haben diese Determinanten bezüglich die Werte

$$-(c^2+2ac\cos A_2+a^2),$$
$$-(a^2+2ab\cos A_3+b^2).$$

VI.

33. Es gehen durch je einen Punkt die Geraden

$$\begin{array}{ccc} E_0R_1 & E_3R_2 & E_2R_3 \\ E_3S_1 & E_0S_2 & E_1S_3 \\ E_2T_1 & E_1T_2 & E_0T_3. \end{array}$$

Die Gleichungen der Geraden in der ersten Gruppe gestalten sich folgendermassen

$$E_0R_1 \equiv x_1(\sin^2\tfrac{1}{2}A_2-\sin^2\tfrac{1}{2}A_3)-x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_2+x_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_3=0,$$
$$E_3S_1 \equiv x_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_1+x_2(\sin^2\tfrac{1}{2}A_3-\cos^2\tfrac{1}{2}A_1)+x_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_3=0,$$
$$E_2T_1 \equiv x_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_1+x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_2+x_3(\sin^2\tfrac{1}{2}A_2-\cos^2\tfrac{1}{2}A_1)=0.$$

Es ist nun

$$\begin{vmatrix} \cos^2\frac{1}{2}A_1 & \sin^2\frac{1}{2}A_2 & \sin^2\frac{1}{2}A_2-\cos^2\frac{1}{2}A_1 \\ \cos^2\frac{1}{2}A_1 & \sin^2\frac{1}{2}A_3-\cos^2\frac{1}{2}A_1 & \sin^2\frac{1}{2}A_3 \\ \sin^2\frac{1}{2}A_2-\sin^2\frac{1}{2}A_3 & -\sin^2\frac{1}{2}A_2 & \sin^2\frac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}$$
$$= m\begin{vmatrix} \sin^2\frac{1}{2}A_2 & 0 & -\cos^2\frac{1}{2}A_1 \\ \sin^2\frac{1}{2}A_3 & \cos^2\frac{1}{2}A_1 & 0 \\ 0 & -\sin^2\frac{1}{2}A_2 & \sin^2\frac{1}{2}A_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Mithin gehen diese Geraden durch einen Punkt. Dasselbe gilt für die beiden anderen Fälle. Es mögen für diese Punkte $\mathfrak{N}_1\ \mathfrak{N}_2\ \mathfrak{N}_3$ (Fig. 10) gewählt werden.

34. Es liegen je auf einer Geraden die Punkte

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{N}_1 & E_1 & N_1 \\ \mathfrak{N}_2 & E_2 & N_2 \\ \mathfrak{N}_3 & E_3 & N_3. \end{array}$$

Die Gleichungen in Nr. 33 ergeben für $\mathfrak{N}_1\ \mathfrak{N}_2\ \mathfrak{N}_3$ die Koordinaten-Werte

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A_1-\sin^2\tfrac{1}{2}A_2-\sin^2\tfrac{1}{2}A_3$$
$$\cos^2\tfrac{1}{2}A_1-\sin^2\tfrac{1}{2}A_2+\sin^2\tfrac{1}{2}A_3$$
$$\cos^2\tfrac{1}{2}A_1+\sin^2\tfrac{1}{2}A_2-\sin^2\tfrac{1}{2}A_3,\ \text{u. s. w.}$$

Jene für N_i siehe Nr. 22. Bildet man aber die Determinante der Koordinaten für die Punkte in der oben angegebenen Reihenfolge und addirt die letzte Kolonne zur ersten, so wird diese identisch mit der zweiten, die Determinante ist also Null, und die betreffenden Punkte liegen auf einer Geraden.

Die Geraden $\mathfrak{N}_i N_i$ schneiden sich im Centrum des dem Fundamentaldreiecke umgeschriebenen Kreises, da durch diesen Punkt die Geraden $E_i N_i$ gehen. (Vergl. Nr. 22.)

35. Durch E_0 gehen die Geraden

$$\mathfrak{K}_1\mathfrak{N}_1$$
$$\mathfrak{K}_2\mathfrak{N}_2$$
$$\mathfrak{K}_3\mathfrak{N}_3.$$

Die Koordinaten für $\mathfrak{K}_i$ siehe Nr. 27. Subtrahirt man diese Werte von denjenigen, welche zu $\mathfrak{N}_i$ gehören, so lässt sich — in der Determinante — der Faktor $\cos^2\frac{1}{2}A_1 - \sin^2\frac{1}{2}A_1$ herausheben, und die Determinante erscheint mit zwei identischen Reihen, ist also gleich Null. Es liegen demnach die Punkte $E_0\mathfrak{K}_i\mathfrak{N}_i$ auf einer Geraden.

36. Der Schnittpunkt von

$$E_0R_1 \text{ und } E_1R_0,$$
$$E_0S_2 \text{ und } E_2S_0,$$
$$E_0T_3 \text{ und } E_3T_0$$

fällt beziehungsweise zusammen mit dem Schnittpunkte von

$$E_2R_3 \text{ und } E_3R_2,$$
$$E_3S_1 \text{ und } E_1S_3,$$
$$E_1T_2 \text{ und } E_2T_1.$$

Es gehen nämlich je durch einen Punkt die Geraden

$$\begin{array}{ll} E_1R_0 \text{ und } & E_0R_1 \\ E_2R_3 & E_2R_3 \\ E_3R_2 & E_3R_2, \text{ u. s. w.} \end{array}$$

Denn man hat

$$E_1R_0 \equiv x_1(\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_3) + x_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - x_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0$$
$$E_0R_1 \equiv x_1(\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 - \sin^2\tfrac{1}{2}A_3) - x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 + x_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0$$
$$E_2R_3 \equiv x_1(\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_3) + x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 + x_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0$$
$$E_3R_2 \equiv x_1(\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - \sin^2\tfrac{1}{2}A_3) - x_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - x_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0.$$

Und es ist

$$\begin{vmatrix} \cos^2\frac{1}{2}A_2 - \cos^2\frac{1}{2}A_3 & \cos^2\frac{1}{2}A_2 & -\cos^2\frac{1}{2}A_3 \\ \sin^2\frac{1}{2}A_2 - \cos^2\frac{1}{2}A_3 & \sin^2\frac{1}{2}A_2 & \cos^2\frac{1}{2}A_3 \\ \cos^2\frac{1}{2}A_2 - \sin^2\frac{1}{2}A_3 & -\cos^2\frac{1}{2}A_2 & -\sin^2\frac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 0 & \cos^2\frac{1}{2}A_2 & -\cos^2\frac{1}{2}A_3 \\ -\cos^2\frac{1}{2}A_3 & \sin^2\frac{1}{2}A_2 & \cos^2\frac{1}{2}A_3 \\ \cos^2\frac{1}{2}A_2 & -\cos^2\frac{1}{2}A_2 & -\sin^2\frac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 0 & \cos^2\frac{1}{2}A_2 & -\cos^2\frac{1}{2}A_3 \\ -\cos^2\frac{1}{2}A_3 & 1 & 0 \\ \cos^2\frac{1}{2}A_2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Also gehen E_1R_0 E_2R_3 E_3R_2 durch einen Punkt (Fig. 11).

Allein es ist auch

$$\begin{vmatrix} \sin^2\frac{1}{2}A_2 - \sin^2\frac{1}{2}A_3 & -\sin^2\frac{1}{2}A_2 & \sin^2\frac{1}{2}A_3 \\ \sin^2\frac{1}{2}A_2 - \cos^2\frac{1}{2}A_3 & \sin^2\frac{1}{2}A_2 & \cos^2\frac{1}{2}A_3 \\ \cos^2\frac{1}{2}A_2 - \sin^2\frac{1}{2}A_3 & -\cos^2\frac{1}{2}A_2 & -\sin^2\frac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 0 & -\sin^2\frac{1}{2}A_2 & \sin^2\frac{1}{2}A_3 \\ \sin^2\frac{1}{2}A_2 & \sin^2\frac{1}{2}A_2 & \cos^2\frac{1}{2}A_3 \\ -\sin^2\frac{1}{2}A_3 & -\cos^2\frac{1}{2}A_2 & -\sin^2\frac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 0 & -\sin^2\frac{1}{2}A_2 & \sin^2\frac{1}{2}A_3 \\ \sin^2\frac{1}{2}A_2 & 0 & 1 \\ -\sin^2\frac{1}{2}A_3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch jenen Punkt geht sohin auch noch E_0R_1, oder der Schnittpunkt von E_0R_1 und E_1R_0 ist identisch mit dem Schnittpunkt von E_2R_3 und E_3R_2. Aehnlich gestaltet sich die Rechnung in den beiden andern Fällen. Zur Bezeichnung dieser Punkte dienen $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ $\mathfrak{P}_3$ (Fig. 11).

37. Die Punkte $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ $\mathfrak{P}_3$ liegen auf den Höhen des Fundamental-Dreieckes.

Die Koordinaten der Punkte $\mathfrak{P}_i$, welche aus den Gleichungen in Nr. 36 abgeleitet werden, haben eine relativ einfache Gestalt. Dieselben sind — entnommen den Gleichungen für E_0R_1 und E_1R_0, u. s. w. — beziehungsweise

$$\begin{matrix} 1 & \cos A_3 & \cos A_2 \\ \cos A_3 & 1 & \cos A_1 \\ \cos A_2 & \cos A_1 & 1 \end{matrix}.$$

Diese Werte genügen den Gleichungen der Höhen des Dreieckes $A_1A_2A_3$, welche die Form haben

$$x_3 \cos A_3 - x_2 \cos A_2 = 0$$

u. s. w.

38. Die Punkte $\mathfrak{P}_i$ halbieren die Höhen des Fundamental-Dreieckes.

Die Halbierungspunkte der Seiten A_2A_3 A_3A_1 A_1A_2 werden mit C_1 C_2 C_3 bezeichnet. Es lässt sich nun beweisen, dass

$$C_1 \; C_2 \; \mathfrak{P}_3, \text{ u. s. w.}$$

je auf einer Geraden liegen. Damit ist dann auch der Satz bewiesen. Jenes findet aber wirklich statt, denn da

$$\begin{matrix} 0 & \sin A_3 & \sin A_2 \\ \sin A_3 & 0 & \sin A_3 \\ \sin A_2 & \sin A_1 & 0 \end{matrix}$$

die Koordinaten von C_1 C_2 C_3 sind, so hat man z. B.

$$\begin{vmatrix} \cos A_2 & 0 & \sin A_3 \\ \cos A_1 & \sin A_3 & 0 \\ 1 & \sin A_2 & \sin A_1 \end{vmatrix}$$

$$= \sin A_3 (\sin A_1 \cos A_2 + \cos A_1 \sin A_2 - \sin A_3) = 0.$$

VII.

39. Sind zwei Dreiecke perspektivisch gelegen und zwar so, dass das eine dem andern umgeschrieben ist, so gilt folgender Satz: Zieht man in dem einen der beiden Dreiecke drei Gerade durch einen Punkt und verbindet die Punkte, in welchen diese Geraden die Seiten des Dreieckes treffen, durch gerade Linien mit den Eckpunkten des zweiten Dreieckes, so gehen auch diese durch einen Punkt.

Es sei (Fig. 12) das Dreieck $A_1A_2A_3$ dem Dreiecke $B_1B_2B_3$ umgeschrieben, und es gehen die Geraden A_1B_1 A_2B_2 A_3B_3 durch einen Punkt (A_0), oder mit anderen Worten, es bestehe die Beziehung

$$\frac{A_1B_3}{B_3A_2} \cdot \frac{A_2B_1}{B_1A_3} \cdot \frac{A_3B_2}{B_2A_1} = 1.$$

Als Fundamentaldreieck werde ferner $B_1B_2B_3$ genommen, und die von dem Punkte A_i auf die Seiten B_rB_s gefällten Senkrechten, das ist die Koordinaten dieser Punkte, werden mit

$$x_i' \qquad x_i'' \qquad x_i'''$$

bezeichnet. Aus ähnlichen Dreiecken, in welchen diese Koordinaten als Katheten auftreten, folgt

$$\begin{aligned} \frac{x_1'}{x_1''} &= \frac{x_2'}{x_2''} = \frac{A_1B_3}{B_3A_2} = \lambda, \\ \frac{x_2''}{x_2'''} &= \frac{x_3''}{x_3'''} = \frac{A_2B_1}{B_1A_3} = \mu, \qquad (1) \\ \frac{x_3'''}{x_3'} &= \frac{x_1'''}{x_1'} = \frac{A_3B_2}{B_2A_1} = \nu. \end{aligned}$$

In dem Dreiecke $B_1B_2B_3$ seien ferner drei gerade Linien von den Eckpunkten aus gezogen, nämlich

$$B_1D_1 \qquad B_2D_2 \qquad B_3D_3.$$

Es besteht dann zwischen den so gebildeten Abschnitten der Seiten des Dreieckes die Relation

$$\frac{B_2D_1}{D_1B_3} \cdot \frac{B_3D_2}{D_2B_1} \cdot \frac{B_1D_3}{D_3B_2} = 1 = lmn,$$

wo

$$\frac{B_2D_1}{D_1B_3} = l, \text{ u. s. w.}$$

gesetzt worden ist.

Die Koordinaten von D_1 können nun ausgedrückt werden durch

$$\begin{matrix} 0 \\ D_1B_3\sin B_3 \\ B_2D_1\sin B_2, \end{matrix}$$

oder

$$\begin{matrix} 0 \\ \sin B_3 \\ \frac{B_2D_1}{D_1B_3} \cdot \sin B_2 = l\sin B_2. \end{matrix}$$

Analog folgt für D_2 und D_3

$$\begin{matrix} m\sin B_3 & \sin B_2 \\ 0 & n\sin B_1 \\ \sin B_1 & 0\ . \end{matrix}$$

Für die Gleichungen der Geraden A_iD_i kommt

$$A_1D_1 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & -x_1' & 0 \\ x_2 & x_2' & \sin B_3 \\ x_3 & x_3' & l\sin B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$A_1D_1 \equiv \quad x_1\left[\frac{x_2'}{x_1'}l\sin B_2 - \frac{x_3'}{x_1'}\sin B_3\right] + x_2 l\sin B_2 - x_3\sin B_3 = 0,$$

$$A_2D_2 \equiv -x_1\sin B_1 + x_2\left[\frac{x_3''}{x_2''}m\sin B_3 - \frac{x_1''}{x_2''}\sin B_1\right] + x_3 m\sin B_3 = 0,$$

$$A_3D_3 \equiv \quad x_1 n\sin B_1 - x_2\sin B_2 + x_2\left[\frac{x_1'''}{x_3'''}n\sin B_1 - \frac{x_2'''}{x_3'''}\sin B_2\right] = 0.$$

Die Determinante der Koëffizienten der Unbekannten in diesen drei Gleichungen ist gleich Null, da die Sinus' der Winkel B_i stets mit paarweise gleichen und ungleich bezeichneten Faktoren aufscheinen. So erhält man z. B.

$$-\frac{x_2'}{x_1'}\cdot\frac{x_3''}{x_2''}\cdot\frac{x_2'''}{x_3'''}lm\sin^2B_2\sin B_3 + \frac{x_2'}{x_1'}lm\sin^2B_2\sin B_3.$$

Nach den Gleichungen (1) ist aber

$$\frac{x_3''}{x_2''}\cdot\frac{x_2'''}{x_3'''} = \frac{x_3''}{x_2'''}\cdot\frac{x_2'''}{x_3'''} = 1.$$

Also erscheint der Ausdruck $lm\sin^2B_2\sin B_3$ zweimal mit demselben Koëffizienten $\frac{x_2'}{x_1'}$, aber entgegengesetzt bezeichnet, ist sohin gleich Null.

In gleicher Weise fällt

$$\frac{x_2'}{x_1'}\cdot\frac{x_3''}{x_2''}\cdot\frac{x_1'''}{x_3'''}lmn\sin B_1\sin B_2\sin B_3 - \frac{x_3'}{x_1'}\cdot\frac{x_1''}{x_2''}\cdot\frac{x_2'''}{x_3'''}\sin B_1\sin B_2\sin B_3$$

weg, da

$$\frac{x_2'}{x_1'}\cdot\frac{x_3''}{x_2''}\cdot\frac{x_1'''}{x_3'''} = \frac{x_2'}{x_2''}\cdot\frac{x_3''}{x_3'''}\cdot\frac{x_1'''}{x_1'} = 1$$

und

$$\frac{x_3'}{x_1'}\cdot\frac{x_1''}{x_2''}\cdot\frac{x_2'''}{x_3'''} = \frac{x_3'}{x_3'''}\cdot\frac{x_1''}{x_1'}\cdot\frac{x_2'''}{x_2''} = \frac{1}{\lambda\mu\nu} = 1$$

und endlich auch

$$lmn = 1$$

ist. U. s. w. Die Determinante der Koëffizienten verschwindet sohin, woraus folgt, dass die Geraden A_iD_i durch einen Punkt gehen.

Folgerung. Aus dem soeben bewiesenen Satz, der allgemeine Geltung hat, können, da die in vorliegender Arbeit betrachteten Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $E_1E_2E_3$ perspektivische Lage haben, folgende Schlüsse gezogen werden:

a) Es gehen notwendig durch je einen Punkt die Geraden

$$\begin{array}{ll} E_1R_0 & E_1R_1 \\ E_2S_0 & E_2S_1 \\ E_3T_0 & E_3T_1, \text{ u. s. w.,} \end{array}$$

da die Geraden

$$\begin{array}{ll} A_1R_0 & A_1R_1 \\ A_2S_0 & A_2S_1 \\ A_3T_0 & A_3T_1, \text{ u. s. w.,} \end{array}$$

durch einen Punkt gehen.

b) Es schneiden sich in einem Punkt (F)

$$\begin{array}{l} E_1C_1 \\ E_2C_2 \\ E_3C_3, \end{array}$$

da die Schwerlinien des Dreieckes $A_1A_2A_3$ durch einen Punkt gehen.

c) Umschreibt man dem Fundamentaldreieck ein mit demselben perspektivisch gelegenes Dreieck $E_1'E_2'E_3'$, und bezeichnen, wie sonst, E_1 E_2 E_3 die Mittelpunkte der den Seiten des ersteren anbeschriebenen Kreise, so schneiden sich je in einem Punkt

$$\begin{array}{ll} E_1'R_0 & E_1'R_0 \\ E_2'S_0 & E_2'S_3 \\ E_3'T_0 & E_3'T_2, \text{ u. s. w.} \end{array}$$

40. Sind zwei Dreiecke perspektivisch gelegen, und zwar so, dass das eine dem andern umgeschrieben ist, und ist A_0 der Kollineationspunkt der beiden Dreiecke, so gehen je durch einen Punkt

$$\begin{array}{lll} D_1A_0 & D_1A_3 & D_1A_2 \\ D_2A_3 & D_2A_0 & D_2A_1 \\ D_3A_2 & D_2A_1 & D_3A_0. \end{array}$$

Die Koordinaten von A_0 (Fig. 13) seien

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3.$$

Zwischen diesen und den Koordinaten von $A_1A_2A_3$ besteht die Beziehung

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{x_2'}{x_3'}, \quad \frac{a_3}{a_1} = \frac{x_3''}{x_1''}, \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{x_1'''}{x_2'''}.$$

Die Gleichung der Geraden A_0D_1 ist

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & 0 \\ x_2 & a_2 & \sin B_3 \\ x_3 & a_3 & l\sin B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$A_0D_1 \equiv x_1\left[\frac{a_2}{a_1} l\sin B_2 - \frac{a_3}{a_1}\sin B_3\right] - x_2 l\sin B_2 + x_3 \sin B_3 = 0.$$

Für A_3D_2 und A_2D_3 hat man

$$A_3D_2 \equiv -x_1\sin B_1 + x_2\left[\frac{x_3'''}{x_2'''} m\sin B_3 + \frac{x_1'''}{x_2'''}\sin B_1\right] + x_3 m\sin B_3 = 0,$$

$$A_2D_3 \equiv -x_1 n\sin B_1 + x_2\sin B_2 + x_3\left[\frac{x_1''}{x_3''} n\sin B_1 + \frac{x_2''}{x_3''}\sin B_2\right] = 0.$$

Die Determinante der Koëffizienten dieser Gleichungen verschwindet. So erhält man z. B.

$$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{x_1'''}{x_2'''}\cdot\frac{x_2''}{x_3''} l\sin B_1\sin^2 B_2 - \frac{x_2''}{x_3''} l\sin B_1\sin^2 B_2.$$

Nun ist

$$\frac{a_2}{a_1} = 1 : \frac{a_1}{a_2} = 1 : \frac{x_1'''}{x_2'''} = \frac{x_2'''}{x_1'''}.$$

Mithin

$$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{x_1'''}{x_2'''} = \frac{x_2'''}{x_1'''}\cdot\frac{x_1'''}{x_2'''} = 1,$$

und der Ausdruck $l\sin B_1\sin^2 B_2$ kommt zweimal mit gleichem aber entgegengesetzt bezeichnetem Koëffizienten vor, ist also gleich Null.

In gleicher Weise verschwindet der Ausdruck $\sin B_1\sin B_2\sin B_3$, da

$$\frac{a_3}{a_1}\cdot\frac{x_1'''}{x_2'''}\cdot\frac{x_2''}{x_3''} = \frac{x_3''}{x_1''}\cdot\frac{x_1'''}{x_2'''}\cdot\frac{x_2''}{x_3''} = \frac{x_1'''}{x_1'}\cdot\frac{x_1'}{x_1''}\cdot\frac{x_2''}{x_2'''} = 1,$$

ist und ebenso

$$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{x_3'''}{x_2'''}\cdot\frac{x_1''}{x_3''} = \frac{x_2'''}{x_1'''}\cdot\frac{x_3'''}{x_2'''}\cdot\frac{x_1''}{x_3''} = \frac{x_3'''}{x_3''}\cdot\frac{x_1''}{x_1'}\cdot\frac{x_1'}{x_1'''} = \frac{1}{\lambda\mu\nu} = 1$$

ist. Es gehen also u. s. w.

Folgerung. Da der Mittelpunkt des dem Fundamental-Dreiecke eingeschriebenen Kreises (E_0) das Kollineations-Centrum der Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $E_1E_2E_3$ ist, wo E_i die Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise sind, so gehen je durch einen Punkt

a)

$$\begin{matrix} E_0C_1 & E_3C_1 & E_2C_1 \\ E_3C_2 & E_0C_2 & E_1C_2 \\ E_2C_3 & E_1C_3 & E_0C_3; \end{matrix}$$

es sind das die in Nr. 16 mit F_i bezeichneten Punkte;

b)

$$\begin{matrix} E_0R_0 & E_3R_0 & E_2R_0 \\ E_3S_0 & E_0S_0 & E_1S_0 \\ E_2T_0 & E_1T_0 & E_0T_0, \end{matrix}$$

es sind dies (Nr. 28) die Punkte $\mathfrak{L}_i$;

c) E_0R_1
E_3S_1
E_2T_1, u. s. w.,

in Nr. 33 mit $\mathfrak{N}_i$ bezeichnet, da die Geraden

$$A_1R_1 \quad A_2S_1 \quad A_3T_1$$

durch einen Punkt gehen.

VIII.

41. Die Radien der den Dreiecken $A_2A_3E_1$ $A_3A_1E_2$ $A_1A_2E_3$ eingeschriebenen Kreise verhalten sich zu einander wie die Senkrechten, welche von dem Mittelpunkte des durch E_1 E_2 E_3 gehenden Kreises auf E_2E_3 E_3E_1 E_1E_2 gefällt werden.

Die Radien der den Dreiecken $A_1A_2E_1$, etc. eingeschriebenen Kreise (Fig. 14) seien

$$\varrho_1 \quad \varrho_2 \quad \varrho_3.$$

Wenn a b c die Seiten eines Dreieckes und f den Flächeninhalt bezeichnet, so ist der Radius des eingeschriebenen Kreises

$$r = \frac{2f}{a+b+c}.$$

Demnach ist

$$\varrho_1 = \frac{s_1 h_1'}{s_1 + A_3E_1 + E_1A_2}.$$

Wegen

$$E_1 = \tfrac{1}{2}A_2 + \tfrac{1}{2}A_3 = 90^0 - \tfrac{1}{2}A_1,$$
$$E_2 = \tfrac{1}{2}A_3 + \tfrac{1}{2}A_1 = 90^0 - \tfrac{1}{2}A_2,$$
$$E_3 = \tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{2}A_2 = 90^0 - \tfrac{1}{2}A_3$$

hat man

$$A_3E_1 = s_1\frac{\cos\frac{1}{2}A_2}{\cos\frac{1}{2}A_1} \text{ und } E_1A_2 = s_1\frac{\cos\frac{1}{2}A_3}{\cos\frac{1}{2}A_1}.$$

Ferner hat h_1' — es ist dies identisch mit dem Radius r_1 des Berührungskreises E_1 — den Wert

$$h'_1 = \frac{s_1}{\cos^2\frac{1}{2}A_1}\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3$$
$$= \frac{8s_1}{\cos^2\frac{1}{2}A_1}\sin(\tfrac{1}{2}A_2+\tfrac{1}{2}A_3)\sin(\tfrac{1}{2}A_3+\tfrac{1}{2}A_1)\sin(\tfrac{1}{2}A_1+\tfrac{1}{2}A_2)$$
$$\times\cos(\tfrac{1}{2}A_2+\tfrac{1}{2}A_3)\cos(\tfrac{1}{2}A_3+A_1)\cos(\tfrac{1}{2}A_1+\tfrac{1}{2}A_2).$$

Setzt man diese Werte in der Formel für ϱ_1 ein, so folgt

$$\varrho_1 = \frac{2s_1}{\cos\frac{1}{2}A_1}\sin(\tfrac{1}{2}A_2+\tfrac{1}{2}A_3)\sin(\tfrac{1}{2}A_3+\tfrac{1}{2}A_1)\sin(\tfrac{1}{2}A_1+\tfrac{1}{2}A_2),$$

da

$$\cos\tfrac{1}{2}A_1 + \cos\tfrac{1}{2}A_2 + \cos\tfrac{1}{2}A_3 = 4\cos(\tfrac{1}{2}A_2+\tfrac{1}{2}A_3)\cos(\tfrac{1}{2}A_3+\tfrac{1}{2}A_1)\cos(\tfrac{1}{2}A_1+\tfrac{1}{2}A_2)$$

ist. Analog gestalten sich die Ausdrücke für ϱ_2 und ϱ_3, nämlich

$$\varrho_2 = \frac{2s_2}{\cos\frac{1}{2}A_2} \sin(\tfrac{1}{2}A_2 + \tfrac{1}{2}A_3) \sin(\tfrac{1}{2}A_3 + \tfrac{1}{2}A_1) \sin(\tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{2}A_2),$$

$$\varrho_3 = \frac{2s_3}{\cos\frac{1}{2}A_3} \sin(\tfrac{1}{2}A_2 + \tfrac{1}{2}A_3) \sin(\tfrac{1}{2}A_3 + \tfrac{1}{2}A_1) \sin(\tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{2}A_2).$$

Da nun

$$s_1 : s_2 : s_3 = \sin A_1 : \sin A_2 : \sin A_3$$

ist, so folgt

$$\varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3 = \sin\tfrac{1}{2}A_1 : \sin\tfrac{1}{2}A_2 : \sin\tfrac{1}{2}A_3$$
$$= \cos E_1 : \cos E_2 : \cos E_3.$$

Die Koordinaten des dem Dreiecke $E_1E_2E_3$ umgeschriebenen Kreises, bezogen auf das Dreieck $E_1E_2E_3$ als Fundamentaldreieck, d. i. die von dem Centrum dieses Kreises auf E_rE_s gefällten Senkrechten sind aber ebenfalls den $\cos E_i$ proportional.

42. Sind B_1 B_2 B_3 die Punkte, in denen die den Dreiecken $A_2A_3E_1$, u. s. w. eingeschriebenen Kreise die Seiten des Dreieckes $A_1A_2A_3$ berühren, so gehen durch einen Punkt die Geraden

$$A_1B_1$$
$$A_2B_3$$
$$A_3B_3.$$

Die Mittelpunkte der den Dreiecken $A_2A_3E_1$, u. s. w. eingeschriebenen Kreise (Fig. 14) mögen mit O_1 O_2 O_3 bezeichnet werden. Die Koordinaten derselben berechnen sich in folgender Weise. Als Gleichung von A_3O_1 hat man zunächst

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{\sin\frac{1}{2}(90 - \frac{1}{2}A_3)}{\sin[\frac{1}{2}(90 - \frac{1}{2}A_3) + A_3]} = -\frac{\cos{}^1\!/_4A_3 - \sin{}^1\!/_4A_3}{\cos{}^3\!/_4A_3 + \sin{}^3\!/_4A_3}.$$

Es ist aber

$$\cos 3a = \cos^3 a - 3\sin^2 a \cos a,$$
$$\sin 3a = -\sin^3 a + 3\sin a \cos^2 a.$$

Also ist

$$\cos{}^3\!/_4A_3 + \sin{}^3\!/_4A_3 = (\cos{}^1\!/_4A_3 - \sin{}^1\!/_4A_3)(1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_3)$$

und

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{1}{1 + 2\sin\frac{1}{2}A_3},$$

oder auch

$$A_3O_1 \equiv x_1(1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_3) + x_2 = 0.$$

Ebenso findet man

$$A_2O_1 \equiv x_1(1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_2) + x_3 = 0.$$

Aus beiden Gleichungen ergeben sich für den Punkt O_1 die Werte

$$-1$$
$$1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_3$$
$$1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_2,$$

deren Nenner (R_1) die Form hat

$$R_1 = \frac{4s_3}{\sin A_3} . \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 (\cos\tfrac{1}{2}A_1 + \cos\tfrac{1}{2}A_2 + \cos\tfrac{1}{2}A_3)$$

$$= \frac{16s_3}{\sin A_3} . \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 + \tfrac{1}{2}A_3) \cos(\tfrac{1}{2}A_3 + \tfrac{1}{2}A_1) \cos(\tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{2}A_2).$$

Analog gestaltet sich die Rechnung für O_2 und O_3. Es ist

$$A_3O_2 \equiv x_1 + x_2 (1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_3) = 0,$$
$$A_1O_2 \equiv x_2 (1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_1) + x_3 = 0.$$

O_2 wird bestimmt durch

$$1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_3$$
$$-1$$
$$1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_1,$$

$$R_2 = \frac{16s_3}{\sin A_3} . \sin\tfrac{1}{2}A_3 \sin\tfrac{1}{2}A_1 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 + \tfrac{1}{2}A_3) \cos(\tfrac{1}{2}A_3 + \tfrac{1}{2}A_1) \cos(\tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{2}A_2).$$

Endlich ist

$$A_1O_3 \equiv x_2 + x_3 (1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_1) = 0$$
$$A_2O_3 \equiv x_1 + x_3 (1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_2) = 0.$$

Die Koordinaten von O_3 sind

$$1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_2$$
$$1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_1$$
$$-1\quad,$$

$$R_3 = \frac{16s_3}{\sin A_3} \sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 . \text{ etc.}$$

Um die Koordinaten der Berührungspunkte dieser Kreise mit den Seiten des Fundamentaldreieckes zu bestimmen, hat man als Gleichung der Senkrechten von O_1 auf A_2A_3

$$\begin{vmatrix} x_1 & -1 & 1 \\ x_2 & 1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_3 & -\cos A_3 \\ x_3 & 1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_2 & -\cos A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & -1 & 0 \\ x_2 & 1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_3 & \sin^2\tfrac{1}{2}A_3 \\ x_3 & 1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_2 & \sin^2\tfrac{1}{2}A_2 \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichung gibt, in Verbindung mit jener für A_2A_3 $(x_1 = 0)$, als Koordinatenwerte des Berührungspunktes B_1

$$0$$
$$\sin\tfrac{1}{2}A_3 (1 + \sin\tfrac{1}{2}A_3)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}A_2 (1 + \sin\tfrac{1}{2}A_2).$$

Und es ist

$$A_1B_1 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & \sin\tfrac{1}{2}A_3 (1 + \sin\tfrac{1}{2}A_3) & 0 \\ x_3 & \sin\tfrac{1}{2}A_2 (1 + \sin\tfrac{1}{2}A_2) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Oder — und analog in den beiden andern Fällen —

$$A_1B_1 \equiv x_2 \sin\tfrac{1}{2}A_2 (1 + \sin\tfrac{1}{2}A_2) - x_3 \sin\tfrac{1}{2}A_3 (1 + \sin\tfrac{1}{2}A_3) = 0$$
$$A_2B_2 \equiv x_3 \sin\tfrac{1}{2}A_3 (1 + \sin\tfrac{1}{2}A_3) - x_1 \sin\tfrac{1}{2}A_1 (1 + \sin\tfrac{1}{2}A_1) = 0$$
$$A_3B_3 \equiv x_1 \sin\tfrac{1}{2}A_1 (1 + \sin\tfrac{1}{2}A_1) - x_2 \sin\tfrac{1}{2}A_2 (1 + \sin\tfrac{1}{2}A_2) = 0.$$

Die Summe der linken Theile dieser drei Gleichungen gibt identisch Null, mithin u. s. w.

43. Die Halbierungslinien der Winkel E_i stehen senkrecht auf den Seiten des Dreieckes $O_1O_2O_3$.

Die Rechnung gestaltet sich einfacher, wenn $E_1E_2E_3$ als Fundamentaldreieck zu Grunde gelegt wird.

Bezeichnet ϱ den Radius des dem Dreieck $E_1E_2E_3$ eingeschriebenen Kreises, dessen Centrum O ist (Fig. 14), so ist

$$\varrho = OE_1 \sin\tfrac{1}{2}E_1, \text{ also } OE_1 = \frac{\varrho}{\sin\frac{1}{2}E_1},$$

und

$$\varrho_1 = O_1E_1 \sin\tfrac{1}{2}E_1, \text{ also } O_1E_1 = \frac{\varrho_1}{\sin\frac{1}{2}E_1}.$$

Da aber zwischen den Radien der Kreise O und O_1 die Beziehung besteht

$$\varrho_1 = \varrho\cos E_1,$$

so folgt

$$O_1E_1 = \frac{\varrho\cos E_1}{\sin\frac{1}{2}E_1},$$

und

$$OO_1 = OE_1 - O_1E_1 = \varrho\frac{1-\cos E_1}{\sin\frac{1}{2}E_1} = 2\varrho\sin\tfrac{1}{2}E_1.$$

In gleicher Weise ist

$$OO_2 = 2\varrho\sin\tfrac{1}{2}E_2,\ OO_3 = 2\varrho\sin\tfrac{1}{2}E_3.$$

Die von O_1 auf E_2E_3 gefällte Senkrechte ist gleich

$$\begin{aligned}\varrho + OO_1\sin(E_2+\tfrac{1}{2}E_1) &= \varrho + OO_1\sin(E_3+\tfrac{1}{2}E_1)\\ &= \varrho + OO_1\cos(\tfrac{1}{2}E_2-\tfrac{1}{2}E_3)\\ &= \varrho + 2\varrho\sin\tfrac{1}{2}E_1\cos(\tfrac{1}{2}E_2-\tfrac{1}{2}E_3)\\ &= \varrho(1+\cos E_2+\cos E_3).\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Punktes O_1 sind demnach

$$\begin{matrix}1+\cos E_2+\cos E_3\\ \cos E_1\\ \cos E_1\end{matrix}$$

Für O_2 und O_3 folgt durch ähnliche Schlüsse

$$\begin{matrix}\cos E_2 & \qquad & \cos E_3\\ 1+\cos E_3+\cos E_1 & & \cos E_3\\ \cos E_2 & & 1+\cos E_1+\cos E_2.\end{matrix}$$

Da die Gleichung von O_1E_1 die Form hat

$$x_2 - x_3 = 0,$$

so folgt für die vom Punkte O_2 auf diese Gerade gefällte Senkrechte als Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & \cos E_2 & -\cos E_3+\cos E_2\\ x_2 & 1+\cos E_3+\cos E_1 & 1+\cos E_1\\ x_3 & \cos E_2 & -\cos E_1-1\end{vmatrix} = 0.$$

Soll auf dieser Geraden der Punkt O_3 liegen, so muss die Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos E_3 & \cos E_2 & -\cos E_3 + \cos E_2 \\ \cos E_3 & 1 + \cos E_3 + \cos E_1 & 1 + \cos E_1 \\ 1 + \cos E_1 + \cos E_2 & \cos E_2 & -\cos E_1 - 1 \end{vmatrix}$$

gleich Null sein. Dies ist auch der Fall, denn addirt man die erste und zweite Kolonne — letztere mit negativem Zeichen — zur dritten, so werden die Glieder der dritten Vertikalreihe Null. Es stehen also u. s. w.

44. Die von $O_1\ O_2\ O_3$ auf E_2E_3, u. s. w. gefällten Senkrechten schneiden sich in einem Punkt.

Unter Beibehaltung des Dreieckes $A_1A_2A_3$ als Fundamentaldreieck, hat die von O_1 — die Koordinaten dieses Punktes siehe Nr. 42 — auf E_2E_3 $(x_2 + x_3 = 0)$ gefällte Senkrechte die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & -1 & -\cos A_3 - \cos A_2 \\ x_2 & 1 + 2\sin\frac{1}{2}A_3 & 1 - \cos A_1 \\ x_3 & 1 + 2\sin\frac{1}{2}A_2 & -\cos A_1 + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & -1 & \cos(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) \\ x_2 & 1 + 2\sin\frac{1}{2}A_3 & \sin\frac{1}{2}A_1 \\ x_3 & 1 + 2\sin\frac{1}{2}A_2 & \sin\frac{1}{2}A_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Für die von O_2 und O_3 auf E_3E_1 und E_1E_2 gefällten Senkrechten erhält man ähnliche Ausdrücke. Entwickelt man dieselben, so nehmen sie folgende Form an

$$x_1\sin\tfrac{1}{2}A_1(\sin\tfrac{1}{2}A_2 - \sin\tfrac{1}{2}A_3) + x_2\sin\tfrac{1}{2}A_2[\sin\tfrac{1}{2}A_3 + \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)]$$
$$- x_3\sin\tfrac{1}{2}A_3[\sin\tfrac{1}{2}A_2 + \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)] = 0$$

$$- x_1\sin\tfrac{1}{2}A_1[\sin\tfrac{1}{2}A_3 + \cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)] + x_2\sin\tfrac{1}{2}A_2(\sin\tfrac{1}{2}A_3 - \sin\tfrac{1}{2}A_1)$$
$$+ x_3\sin\tfrac{1}{2}A_3[\sin\tfrac{1}{2}A_1 + \cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)] = 0$$

$$x_1\sin\tfrac{1}{2}A_1[\sin\tfrac{1}{2}A_2 + \cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)] - x_2\sin\tfrac{1}{2}A_2[\sin\tfrac{1}{2}A_1 + \cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)]$$
$$+ x_3\sin\tfrac{1}{2}A_3(\sin\tfrac{1}{2}A_1 - \sin\tfrac{1}{2}A_2) = 0.$$

Die Determinante der Koëffizienten ist — wenn man den gemeinsamen Faktor $\sin\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3$ nicht berücksichtiget —

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{1}{2}A_2 - \sin\frac{1}{2}A_3 & \sin\frac{1}{2}A_3 + \cos(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) & -\sin\frac{1}{2}A_2 - \cos(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) \\ -\sin\frac{1}{2}A_3 - \cos(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1) & \sin\frac{1}{2}A_3 - \sin\frac{1}{2}A_1 & \sin\frac{1}{2}A_1 + \cos(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1) \\ \sin\frac{1}{2}A_2 + \cos(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2) & -\sin\frac{1}{2}A_1 - \cos(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2) & \sin\frac{1}{2}A_1 - \sin\frac{1}{2}A_2 \end{vmatrix}$$

Addirt man die letzte Vertikalreihe zur ersten und multiplizirt das so erhaltene Resultat mit -1, so wird dies identisch mit den Gliedern der zweiten Reihe, der Ausdruck ist sohin gleich Null, oder jene Geraden schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkt ist in Figur 15 mit D bezeichnet.

45. Die Geraden, welche den Punkt D mit den Punkten verbinden, in welchen sich E_rE_s und O_rO_s schneiden, sind mit den Seiten A_rA_s des Fundamentaldreieckes parallel.

Die Gleichungen in Nr. 44 liefern für die Koordinaten des Schnittpunktes (D) die relativ einfachen Werte

$$\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3$$
$$\sin\tfrac{1}{2}A_3\sin\tfrac{1}{2}A_1$$
$$\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2,$$

zu welchen Ausdrücken noch der gemeinsame Faktor

$$\sin A_3 (\cos\tfrac{1}{2}A_1 + \cos\tfrac{1}{2}A_2 + \cos\tfrac{1}{2}A_3)$$

tritt. Die Gleichung von O_1O_2 ist

$$\begin{vmatrix} x_1 & -1 & 1+2\sin\tfrac{1}{2}A_3 \\ x_2 & 1+2\sin\tfrac{1}{2}A_3 & -1 \\ x_3 & 1+2\sin\tfrac{1}{2}A_2 & 1+2\sin\tfrac{1}{2}A_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese und die Gleichung für E_1E_2 $(x_1 + x_2 = 0)$ ergeben als Koordinatenwerte des Schnittpunktes beider Geraden

$$\begin{gathered} -1 - \sin\tfrac{1}{2}A_3 \\ 1 + \sin\tfrac{1}{2}A_3 \\ -\sin\tfrac{1}{2}A_1 + \sin\tfrac{1}{2}A_2. \end{gathered}$$

Analog sind die Koordinaten der Schnittpunkte von O_2O_3 und E_2E_3, O_3O_1 und E_3E_1. Diese Punkte sind in Fig. 15 mit $\mathfrak{S}_1$ $\mathfrak{S}_2$ $\mathfrak{S}_3$ bezeichnet.

Die Gerade, welche den Punkt D mit dem Schnittpunkt von O_1O_2 und E_1E_2 verbindet, ist

$$x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 - x_3 (\cos\tfrac{1}{2}A_1 + \cos\tfrac{1}{2}A_2) = 0.$$

Diese Gerade ist parallel mit A_1A_2 $(x_3 = 0)$, denn sie lässt sich auch in der Form schreiben

$$x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 - x_3 (\cos\tfrac{1}{2}A_1 + \cos\tfrac{1}{2}A_2 + \sin A_3) = 0.$$

46. Die gemeinsamen äusseren Tangenten der Kreise O_1 O_2 O_3 gehen durch einen Punkt, und zwar ist dies derselbe in dem sich die von O_1 O_2 O_3 auf die Seiten des Dreieckes E_1 E_2 E_3 gefällten Senkrechten schneiden.

Die äusseren gemeinsamen Tangenten — von den die Kreise berührenden Seiten des Dreieckes $E_1E_2E_3$ abgesehen — fallen zusammen mit den in Nr. 45 behandelten Geraden, welche den Punkt D mit den Schnittpunkten von E_rE_s und O_rO_s verbinden. Dies lässt sich in folgender Weise zeigen.

Die Normale von O_1 auf A_1A_2, das ist die Koordinate x_3 dieses Punktes hat den Wert (Nr. 42)

$$\frac{M}{R_1} (1 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_2).$$

Die Senkrechte von O_1 auf E_1E_2 ist gleich dem Radius des Kreises O_1, und sohin auch gleich der Normalen (x_1) von O_1 auf A_2A_3, oder gleich

$$\frac{M}{R_1},$$

wobei nur der absolute Wert beachtet wird. Das R_1 hat den Wert (Nr. 42)

$$R_1 = \frac{4s_3}{\sin A_3} \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 (\cos\tfrac{1}{2}A_1 + \cos\tfrac{1}{2}A_2 + \cos\tfrac{1}{2}A_3).$$

Die Differenz beider Normalen ist

$$d = 2\frac{M}{R_1} \sin\tfrac{1}{2}A_2 = \frac{M}{\frac{2s_3}{\sin A_3} \sin\tfrac{1}{2}A_3 (\cos\tfrac{1}{2}A_1 + \cos\tfrac{1}{2}A_2 + \cos\tfrac{1}{2}A_3)}.$$

Soll nun die Verbindungslinie des Punktes D mit dem Schnittpunkte $E_1E_2\ O_1O_2$ Tangente des Kreises O_1 sein, so muss, da (Fig. 15)

$$D\mathfrak{S}_3 \parallel A_1A_2$$

ist, diese Differenz d gleich der Entfernung eben dieser Geraden von A_1A_2 sein, oder gleich der Koordinate x_3 des Punktes D. Diese hat den Wert (Nr. 45)

$$\frac{M}{R'} \sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \,.\, \sin A_3 \,(\cos\tfrac{1}{2}A_1 + \cos\tfrac{1}{2}A_2 + \cos\tfrac{1}{2}A_3).$$

Das R' berechnet sich aus den Gleichungen in Nr. 44. Man hat

$$R' = \frac{s_3}{\sin A_3}\begin{vmatrix} \sin A_1 & \sin A_2 & \sin A_3 \\ \sin\tfrac{1}{2}A_1(\sin\tfrac{1}{2}A_2 - \sin\tfrac{1}{2}A_3) & \sin\tfrac{1}{2}A_2[\sin\tfrac{1}{2}A_3 + \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)] & -\sin\tfrac{1}{2}A_3[\sin\tfrac{1}{2}A_2 + \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)] \\ -\sin\tfrac{1}{2}A_1[\sin\tfrac{1}{2}A_3 + \cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)] & \sin\tfrac{1}{2}A_2(\sin\tfrac{1}{2}A_3 - \sin\tfrac{1}{2}A_1) & \sin\tfrac{1}{2}A_3[\sin\tfrac{1}{2}A_1 + \cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)] \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4s_3}{\sin A_3} \sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \begin{vmatrix} \cos\tfrac{1}{2}A_1 & \cos\tfrac{1}{2}A_2 & \cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ \cos\tfrac{1}{2}A_3\cos\tfrac{1}{2}A_1 & \cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 & -\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 - \cos\tfrac{1}{2}A_3\cos\tfrac{1}{2}A_1 \\ -\sin\tfrac{1}{2}A_3 - \sin\tfrac{1}{2}A_3\sin\tfrac{1}{2}A_1 & \sin\tfrac{1}{2}A_3 + \sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 & -\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 + \sin\tfrac{1}{2}A_3\sin\tfrac{1}{2}A_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4s_3}{\sin A_3} \sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \cos\tfrac{1}{2}A_3 \begin{vmatrix} \cos\tfrac{1}{2}A_1 & \cos\tfrac{1}{2}A_2 & \cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ \cos\tfrac{1}{2}A_1 & \cos\tfrac{1}{2}A_2 & -\cos\tfrac{1}{2}A_1 - \cos\tfrac{1}{2}A_2 \\ -1 - \sin\tfrac{1}{2}A_1 & 1 + \sin\tfrac{1}{2}A_2 & \sin\tfrac{1}{2}A_1 - \sin\tfrac{1}{2}A_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2s_3}{\sin A_3} \sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \sin A_3 \begin{vmatrix} \cos\tfrac{1}{2}A_1 & \cos\tfrac{1}{2}A_2 & \cos\tfrac{1}{2}A_1 + \cos\tfrac{1}{2}A_2 + \cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ \cos\tfrac{1}{2}A_1 & \cos\tfrac{1}{2}A_2 & 0 \\ -1 - \sin\tfrac{1}{2}A_1 & 1 + \sin\tfrac{1}{2}A_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2s_3}{\sin A_3} \sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \,.\, \sin A_3 \,(\cos\tfrac{1}{2}A_1 + \cos\tfrac{1}{2}A_2 + \cos\tfrac{1}{2}A_3)$$
$$\times (\cos\tfrac{1}{2}A_1 + \cos\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 + \cos\tfrac{1}{2}A_2 + \sin\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2)$$

$$= \frac{2s_3}{\sin A_3} \sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \,.\, \sin A_3 \,(\cos\tfrac{1}{2}A_1 + \cos\tfrac{1}{2}A_2 + \cos\tfrac{1}{2}A_3)^2.$$

Der Wert der Koordinate von D auf A_1A_2 reduziert sich nun auf

$$\frac{M}{\dfrac{2s_3}{\sin A_3} \,.\, \sin\tfrac{1}{2}A_3 \,(\cos\tfrac{1}{2}A_1 + \cos\tfrac{1}{2}A_2 + \cos\tfrac{1}{2}A_3)}.$$

Dies ist aber identisch mit dem oben für d angegebenen Ausdruck. Es ist also $D\mathfrak{S}_3$ ebensoweit vom Centrum des Kreises O_1 entfernt wie E_1E_2. Da diese aber den Kreis berührt, so ist auch jene Gerade Tangente des Kreises. U. s. w.

IX.

47. Die Schnittpunkte der Höhen der Dreiecke $A_2A_3E_1$ $A_3A_1E_2$ $A_1A_2E_3$ bilden die Eckpunkte eines Dreieckes — $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$ — welches mit dem Fundamentaldreieck $A_1A_2A_3$ kongruent ist. Die Seiten des einen Dreieckes sind parallel den entsprechenden Seiten des andern.

Der Punkt $\mathfrak{H}_3$ (Fig. 16) ist der Schnittpunkt der Senkrechten von A_1 und A_2 bezüglich auf E_1E_3 und E_3E_2.

Die Gleichung der Normalen von A_1 auf E_3E_1 $(x_1 + x_3 = 0)$ ist

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 - \cos A_2 \\ x_2 & 0 & -\cos A_3 - \cos A_1 \\ x_3 & 0 & -\cos A_1 + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Oder

$$x_2 \sin\tfrac{1}{2}A_2 + x_3 \cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) = 0.$$

Für die von A_2 auf E_2E_3 $(x_2 + x_3 = 0)$ gefällte Senkrechte hat man

$$x_1 \sin\tfrac{1}{2}A_1 + x_3 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) = 0.$$

Diese beiden Geraden schneiden sich im Punkte — $\mathfrak{H}_3$ —

$$\begin{array}{c} \sin\tfrac{1}{2}A_2 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) \\ \sin\tfrac{1}{2}A_1 \cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) \\ -\sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2. \end{array}$$

Die Koordinaten von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ sind analog

$$\begin{array}{cc} -\sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 & \sin\tfrac{1}{2}A_3 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) \\ \sin\tfrac{1}{2}A_3 \cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) & -\sin\tfrac{1}{2}A_3 \sin\tfrac{1}{2}A_1 \\ \sin\tfrac{1}{2}A_2 \cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) & \sin\tfrac{1}{2}A_1 \cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2). \end{array}$$

Der Nenner in den Koordinaten des Punktes $\mathfrak{H}_3$ ist

$$R_3 = \frac{s_3}{\sin A_3} \begin{vmatrix} \sin A_1 & \sin A_2 & \sin A_3 \\ 0 & \sin\tfrac{1}{2}A_2 & \cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) \\ \sin\tfrac{1}{2}A_1 & 0 & \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{s_3}{\sin A_3} \begin{vmatrix} \sin A_1 & \sin A_2 & \sin A_1 + \sin A_2 + \sin A_3 \\ 0 & \sin\tfrac{1}{2}A_2 & 2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \cos\tfrac{1}{2}A_1 \\ \sin\tfrac{1}{2}A_1 & 0 & 2\cos\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{s_3}{\sin A_3} \sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3 \begin{vmatrix} \cos\tfrac{1}{2}A_1 & \cos\tfrac{1}{2}A_2 & \cos\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \\ 0 & 1 & \cos\tfrac{1}{2}A_1 \\ 1 & 0 & \cos\tfrac{1}{2}A_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4s_3}{\sin A_3} \sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \, . \, \cos\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_2.$$

Aehnlich für $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$.

Die Gerade, welche die Punkte $\mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{H}_3$ verbindet, hat zur Gleichung

$$\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & \sin\tfrac{1}{2}A_3 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) & \sin\tfrac{1}{2}A_2 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) \\ x_2 & -\sin\tfrac{1}{2}A_3 \sin\tfrac{1}{2}A_1 & \sin\tfrac{1}{2}A_1 \cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) \\ x_3 & \sin\tfrac{1}{2}A_1 \cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) & -\sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \end{vmatrix} = 0.$$

In diesem Ausdrucke erscheint x_1 mit dem Koëfficienten

$$\sin^2\tfrac12 A_1\,[\sin\tfrac12 A_3 \sin\tfrac12 A_2 - \cos(\tfrac12 A_1 - \tfrac12 A_2)\cos(\tfrac12 A_3 - \tfrac12 A_1)]$$
$$= \sin^2\tfrac12 A_1\,[\cos(\tfrac12 A_1 + \tfrac12 A_2)\cos(\tfrac12 A_3 + \tfrac12 A_1) - \cos(\tfrac12 A_1 - \tfrac12 A_2)\cos(\tfrac12 A_3 - \tfrac12 A_1)]$$
$$= -\sin^2\tfrac12 A_1 \,.\, 2\cos\tfrac12 A_1 \sin\tfrac12 A_1\,(\sin\tfrac12 A_2\cos\tfrac12 A_3 + \cos\tfrac12 A_2 \sin\tfrac12 A_3)$$
$$= -\sin^2\tfrac12 A_1 \,.\, 2\cos^2\tfrac12 A_1 \sin\tfrac12 A_1.$$

Analog für x_2 und x_3. Man findet

$$\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3 \equiv -x_1\sin A_1\sin\tfrac12 A_1 + x_2\sin A_2\cos(\tfrac12 A_2 - \tfrac12 A_3) + x_3\sin A_3\cos(\tfrac12 A_2 - \tfrac12 A_3) = 0$$
$$\mathfrak{H}_3\mathfrak{H}_1 \equiv x_1\sin A_1\cos(\tfrac12 A_3 - \tfrac12 A_1) - x_2\sin A_2\sin\tfrac12 A_2 + x_3\sin A_3\cos(\tfrac12 A_3 - \tfrac12 A_1) = 0$$
$$\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2 \equiv x_1\sin A_1\cos(\tfrac12 A_1 - \tfrac12 A_2) + x_2\sin A_2\cos(\tfrac12 A_1 - \tfrac12 A_2) - x_3\sin A_3\sin\tfrac12 A_3 = 0.$$

Diese Geraden sind nun bezüglich mit A_2A_3 A_3A_1 A_1A_2 parallel, denn es lässt sich z. B. die Gleichung von $\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$ auf die Form bringen

$$-x_1\sin A_1\,[\sin\tfrac12 A_1 + \cos(\tfrac12 A_2 - \tfrac12 A_3)]$$
$$+ (x_1\sin A_1 + x_2\sin A_2 + x_3\sin A_3)\cos(\tfrac12 A_2 - \tfrac12 A_3) = 0.$$

Da nun auch (Fig. 16)

$$A_2\mathfrak{H}_3 \,//\, A_3\mathfrak{H}_2$$

ist, insoferne beide Gerade auf E_2E_3 senkrecht stehen, so muss

$$\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3 = A_2A_3$$

sein. Ebenso folgt

$$\mathfrak{H}_3\mathfrak{H}_1 = A_3A_1 \text{ und } \mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2 = A_1A_2.$$

Es ist mithin das Dreieck

$$\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3 \cong A_1A_3A_3.$$

Die Geraden $A_1\mathfrak{H}_1$ $A_2\mathfrak{H}_2$ $A_3\mathfrak{H}_3$ sind die Diagonalen der Parallelogramme

$$A_1\mathfrak{H}_3\mathfrak{H}_1A_3 \quad A_3\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3A_2 \quad A_2\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2A_1,$$

so dass jede der Geraden A_iH_i zu zwei Parallelogrammen gehört. Die drei Diagonalen schneiden sich in einem Punkt.

Die Gleichung des dem Dreieck $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$ umgeschriebenen Kreises findet man, indem man die Koordinaten-Werte der Punkte $\mathfrak{H}_i$ in die allgemeine Kreisgleichung einsetzt. Dabei wird der Ausdruck

$$x_2x_3\sin A_1 + x_3x_1\sin A_2 + x_1x_2\sin A_3,$$

bei Substituirung der Werte von H_1 für x_1 x_2 x_3,

$$2\sin\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_1\cos(\tfrac12 A_3 - \tfrac12 A_1)\cos(\tfrac12 A_1 - \tfrac12 A_2) - 2\sin\tfrac12 A_2\cos\tfrac12 A_2\cos(\tfrac12 A_1$$
$$- \tfrac12 A_2)\cos(\tfrac12 A_3 + \tfrac12 A_1) - 2\sin\tfrac12 A_3\cos\tfrac12 A_3\cos(\tfrac12 A_3 - \tfrac12 A_1)\cos(\tfrac12 A_1 + \tfrac12 A_2)$$
$$= 2\sin\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_3\cos^2\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_2 + 2\sin^2\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_3\cos\tfrac12 A_1\sin\tfrac12 A_2$$
$$+ 2\sin^2\tfrac12 A_1\cos^2\tfrac12 A_1\sin\tfrac12 A_3\cos\tfrac12 A_2 + 2\sin^2\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_1\sin\tfrac12 A_3\sin\tfrac12 A_1\sin\tfrac12 A_2$$
$$- 2\sin\tfrac12 A_2\cos^2\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_3\cos^2\tfrac12 A_2 + 2\sin\tfrac12 A_2\cos\tfrac12 A_2\cos\tfrac12 A_1\sin\tfrac12 A_3\sin\tfrac12 A_1$$
$$- 2\sin^2\tfrac12 A_2\cos\tfrac12 A_2\sin\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_3\cos\tfrac12 A_1 + 2\sin^2\tfrac12 A_2\cos\tfrac12 A_2\sin^2\tfrac12 A_1\sin\tfrac12 A_3$$
$$- 2\sin\tfrac12 A_3\cos^2\tfrac12 A_3\cos^2\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_2 + 2\sin\tfrac12 A_3\cos^2\tfrac12 A_3\cos\tfrac12 A_1\sin\tfrac12 A_1\sin\tfrac12 A_2$$
$$- 2\sin^2\tfrac12 A_3\cos\tfrac12 A_3\sin\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_2 + 2\sin^2\tfrac12 A_3\cos\tfrac12 A_3\sin^2\tfrac12 A_1\sin\tfrac12 A_2$$
$$= \cos^2\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_2\cos\tfrac12 A_3\,(2\sin\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_1 - 2\sin\tfrac12 A_2\cos\tfrac12 A_2 - 2\sin\tfrac12 A_3\cos\tfrac12 A_3)$$
$$+ \sin^2\tfrac12 A_1\sin\tfrac12 A_2\sin\tfrac12 A_3\,(2\sin\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_1 + 2\sin\tfrac12 A_2\cos\tfrac12 A_2 + 2\sin\tfrac12 A_3\cos\tfrac12 A_3)$$
$$+ \sin\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_2\sin\tfrac12 A_3\,(2\sin\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_1 + 2\sin\tfrac12 A_2\cos\tfrac12 A_2 - 2\sin\tfrac12 A_3\cos\tfrac12 A_3)$$
$$+ \sin\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_1\sin\tfrac12 A_2\cos\tfrac12 A_3\,(2\sin\tfrac12 A_1\cos\tfrac12 A_1 - 2\sin\tfrac12 A_2\cos\tfrac12 A_2 + 2\sin\tfrac12 A_3\cos\tfrac12 A_3)$$

$$= -4\cos^2\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \,.\, \cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3$$
$$+4\sin^2\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 \,.\, \cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3$$
$$+4\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 \,.\, \sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3$$
$$+4\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \,.\, \sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3$$
$$= 4\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \,.\, \sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3\,(-1+4\sin^2\tfrac{1}{2}A_1).$$

Man erhält schliesslich

$$-\frac{a_{11}}{\sin A_1}\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3+\frac{a_{22}}{\sin A_2}\sin\tfrac{1}{2}A_3\cos(\tfrac{1}{2}A_3-\tfrac{1}{2}A_1)+\frac{a_{33}}{\sin A_3}\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos(\tfrac{1}{2}A_1-\tfrac{1}{2}A_2)$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3\,(-1+4\sin^2\tfrac{1}{2}A_1).$$

Analoge Ausdrücke bekommt man, wenn man die Koordinaten-Werte von $\mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{H}_3$ substituirt. Durch Elimination folgt dann

$$\frac{\mathfrak{A}_{11}}{\sin A_1}=\frac{\sin\tfrac{1}{2}A_1\,(1-4\sin^2\tfrac{1}{2}A_1)}{2\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3},\ \text{etc.}$$

Die Gleichung des fraglichen Kreises erhält die Form

$$[x_1\sin A_1\,(1-4\sin^2\tfrac{1}{2}A_1)+x_2\sin A_2\,(1-4\sin^2\tfrac{1}{2}A_2)+x_3\sin A_3\,(1-4\sin^2\tfrac{1}{2}A_3)]$$
$$\times(x_1\sin A_1+x_2\sin A_2+x_3\sin A_3)$$
$$-4\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3\,(x_2x_3\sin A_1+x_3x_1\sin A_2+x_1x_2\sin A_3)=0.$$

Die Radikalaxe dieses und des dem Fundamentaldreieck umgeschriebenen Kreises ist

$$x_1\sin A_1\,(1-4\sin^2\tfrac{1}{2}A_1)+x_2\sin A_2\,(1-4\sin^2\tfrac{1}{2}A_2)+x_3\sin A_3\,(1-4\sin^2\tfrac{1}{2}A_3)=0,$$

und ist parallel mit der Geraden

$$x_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_1+x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_2+x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_3=0.$$

Diese Letztere ist die Harmonikale des Schnittpunktes (Q) von A_1R_1 A_2S_2 A_3T_3, welche durch die Gleichungen bestimmt sind

$$x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_2-x_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_3=0,\ \text{etc.}$$

48. Der Schnittpunkt von

$$A_1\mathfrak{H}_1$$
$$A_2\mathfrak{H}_2$$
$$A_3\mathfrak{H}_3$$

ist identisch mit dem Radikal-Centrum der drei äussern Berührungskreise E_1 E_2 E_3 des Fundamentaldreieckes.

Der Schnittpunkt der Geraden $A_i\mathfrak{H}_i$ hat die Koordinaten

$$\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3\cos(\tfrac{1}{2}A_2-\tfrac{1}{2}A_3)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}A_3\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos(\tfrac{1}{2}A_3-\tfrac{1}{2}A_1)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos(\tfrac{1}{2}A_1-\tfrac{1}{2}A_2)$$

Sie berechnen sich aus

$$A_1\mathfrak{H}_1\equiv x_2\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos(\tfrac{1}{2}A_1-\tfrac{1}{2}A_2)-x_3\sin\tfrac{1}{2}A_3\cos(\tfrac{1}{2}A_3-\tfrac{1}{2}A_1)=0,$$
$$A_2\mathfrak{H}_2\equiv x_1\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos(\tfrac{1}{2}A_1-\tfrac{1}{2}A_2)-x_3\sin\tfrac{1}{2}A_3\cos(\tfrac{1}{2}A_2-\tfrac{1}{2}A_3)=0.$$

Zu den obigen Werten kommt noch der Faktor $\cos(\tfrac{1}{2}A_1-\tfrac{1}{2}A_2)$.

Die Gleichungen der Radikalaxen der Kreise E_1 E_2 E_3 findet man aus den Gleichungen der letzteren. Der Kreis E_1 wird dargestellt durch

$$\left(x_1 \frac{\cos^4\frac{1}{2}A_1}{\sin A_1} + x_2 \frac{\sin^4\frac{1}{2}A_2}{\sin A_2} + x_3 \frac{\sin^4\frac{1}{2}A_3}{\sin A_3}\right)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3)$$

$$-\frac{4\cos^2\frac{1}{2}A_1 \sin^2\frac{1}{2}A_2 \sin^2\frac{1}{2}A_3}{\sin A_1 \sin A_2 A_3}(x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3) = 0.$$

In der Gleichung für den Kreis E_2 hat x_2 den cos.

Die Radikalaxe beider Kreise ist

$$\left(x_1 \frac{\cos^4\frac{1}{2}A_1}{\sin A_1} + x_2 \frac{\sin^4\frac{1}{2}A_2}{\sin A_2} + x_3 \frac{\sin^4\frac{1}{2}A_3}{\sin A_3}\right) \frac{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3}{4\cos^2\frac{1}{2}A_1 \sin^2\frac{1}{2}A_3 \sin^2\frac{1}{2}A_3}$$

$$= \left(x_1 \frac{\sin^4\frac{1}{2}A_1}{\sin A_1} + x_2 \frac{\cos^4\frac{1}{2}A_2}{\sin A_2} + x_3 \frac{\sin^4\frac{1}{2}A_3}{\sin A_3}\right) \frac{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3}{4\sin^2\frac{1}{2}A_1 \cos^2\frac{1}{2}A_2 \sin^2\frac{1}{2}A_3}.$$

Entwickelt man, so erhält x_1 den Koëffizienten

$$\frac{\cos^4\frac{1}{2}A_1}{\sin A_1} \cdot \sin^2\frac{1}{2}A_1 \cos^2\frac{1}{2}A_2 - \frac{\sin^4\frac{1}{2}A_1}{\sin A_1} \cos^2\frac{1}{2}A_1 \sin^2\frac{1}{2}A_2$$

$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}A_1 \cos^2\frac{1}{2}A_1}{\sin A_1} (\cos^2\frac{1}{2}A_1 \cos^2\frac{1}{2}A_2 - \sin^2\frac{1}{2}A_1 \sin^2\frac{1}{2}A_2)$$

$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}A_1 \cos^2\frac{1}{2}A_1}{\sin A_1} (\cos\frac{1}{2}A_1 \cos\frac{1}{2}A_2 - \sin\frac{1}{2}A_1 \sin\frac{1}{2}A_2)(\cos\frac{1}{2}A_1 \cos\frac{1}{2}A_2 + \sin\frac{1}{2}A_1 \sin\frac{1}{2}A_2,$$

$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}A_1 \cos^2\frac{1}{2}A_1}{\sin A_1} \sin\frac{1}{2}A_3 \cos(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2).$$

Für x_2 und x_3 gestaltet sich die Rechnung ähnlich.

Man erhält schliesslich für die Radikalaxe der Kreise E_1 und E_2

$$x_1 \sin A_1 \cos(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2) - x_2 \sin A_2 \cos(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2) + x_3 \sin^2\frac{1}{2}A_3 \sin(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2) = 0)$$

für jene der Kreise E_2 und E_3, E_3 und E_1 bezüglich

$$x_1 \sin^2\frac{1}{2}A_1 \sin(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) + x_2 \sin A_2 \cos(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) - x_3 \sin A_3 \cos(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) = 0,$$

$$-x_1 \sin A_1 \cos(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1) + x_2 \sin^2\frac{1}{2}A_2 \sin(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1) + x_3 \sin A_3 \cos(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1) = 0.$$

Setzt man die Koordinatenwerte des Schnittpunktes von $A_i \mathfrak{H}_i$ z. B. in die erste dieser Gleichungen ein, so kann der Faktor

$$\sin\frac{1}{2}A_1 \sin\frac{1}{2}A_2 \sin\frac{1}{2}A_3 \cos(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2)$$

unmittelbar herausgehoben werden, und es bleibt noch

$$\cos\frac{1}{2}A_1 \cos(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) - \cos\frac{1}{2}A_2 \cos(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1) + \sin\frac{1}{2}A_3 \sin(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2).$$

Dieser Ausdruck ist nun gleich Null, was sich leicht ergibt, wenn man $\cos(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3)$, u. s. w. entwickelt.

Es liegt also jener Schnittpunkt auf den drei Radikalaxen der äusseren Berührungskreise und ist sohin identisch mit dem Radikal-Centrum, da sich die Axen eben im Radikal-Centrum schneiden.

Die Radikalaxen sind in Fig. 16 mit p_1 p_2 p_3, das Centrum mit P_0 bezeichnet.

49. Das Radikal-Centrum halbiert die Strecken $A_i \mathfrak{H}_i$.

Folgt unmittelbar aus Nr. 47.

50. Die Radikalaxen der Kreise E_i gehen durch die Halbierungspunkte der Seiten des Dreieckes $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$.

Die Radikalaxen treffen die Seiten des Fundamentaldreieckes in den Halbierungspunkten. Nun stehen aber einerseits $A_3\mathfrak{H}_2$ $A_2\mathfrak{H}_3$ und die Radikalaxe von E_2 und E_3 senkrecht auf E_2E_3, andererseits ist

$$\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3 \,//\, A_2A_3,$$

mithin trifft die Radikalaxe die Seite $\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$ im Halbierungspunkt, u. s. w.

51. Der Mittelpunkt des dem Dreieck $E_1E_2E_3$ umgeschriebenen Kreises (M') ist der Schnittpunkt der Höhen des Dreieckes $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$.

Die Gleichung der von $\mathfrak{H}_2$ auf $\mathfrak{H}_3\mathfrak{H}_1$, oder auch, da $\mathfrak{H}_3\mathfrak{H}_1 \,//\, A_3A_1$ ist, auf A_3A_1 gefällten Senkrechten ist

$$\begin{vmatrix} x_1 & \sin\tfrac{1}{2}A_3\cos(\tfrac{1}{2}A_2-\tfrac{1}{2}A_3) & -\cos A_3 \\ x_2 & -\sin\tfrac{1}{2}A_3\sin\tfrac{1}{2}A_1 & 1 \\ x_3 & \sin\tfrac{1}{2}A_1\cos(\tfrac{1}{2}A_1-\tfrac{1}{2}A_2) & -\cos A_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieser Gleichung genügen die Koordinaten des Mittelpunktes M' des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises (Nr. 4)

$$\begin{array}{l} 1-2\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ 1-2\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \\ 1-2\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3. \end{array}$$

Uebrigens ist unmittelbar klar, dass der Punkt M' mit dem Schnittpunkte der Höhen zusammenfällt, da E_1R_1 E_2S_2 E_3T_3 durch M' gehen, diese Geraden ber die von E_1, u. s. w. auf A_2A_3, u. s. w. gefällten Senkrechten sind.

Die Gerade, welche diesen Punkt M' mit dem Punkt H verbindet, in dem sich die Höhen des Dreieckes $A_1A_2A_3$ schneiden, geht durch das Radikal-Centrum der Berührungskreise E_1 E_2 E_3 und es ist

$$M'P_0 = P_0H.$$

52. Der Schnittpunkt der Geraden

$$\begin{array}{c} A_1R_1 \\ A_2S_2 \\ A_3T_3 \end{array}$$

ist das Centrum des dem Dreieck $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$ eingeschriebenen Kreises.

Die Koordinaten von R_1 S_2 E_3 sind

$$\begin{array}{ccc} 0 & \sin^2\tfrac{1}{2}A_3 & \sin^2\tfrac{1}{2}A_3 \\ \sin^2\tfrac{1}{2}A_3 & 0 & \sin^2\tfrac{1}{2}A_1 \\ \sin^2\tfrac{1}{2}A_2 & \sin^2\tfrac{1}{2}A_1 & 0 \end{array}$$

Als Gleichungen von A_1R_1, u. s. w. hat man

$$\begin{array}{l} A_1R_1 \equiv x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 - x_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 = 0 \\ A_2S_2 \equiv x_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 - x_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 = 0 \\ A_3T_3 \equiv x_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 - x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 = 0. \end{array}$$

Daraus ergeben sich die Koordinaten des Schnittpunktes Q (Fig. 16) der drei Geraden

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 \sin^2\tfrac{1}{2}A_3$$
$$\sin^2\tfrac{1}{2}A_3 \sin^2\tfrac{1}{2}A_1$$
$$\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 \sin^2\tfrac{1}{2}A_2.$$

Der Mittelpunkt des dem Dreiecke $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$ eingeschriebenen Kreises ist nun jener Punkt, in welchem sich die von den Eckpunkten dieses Dreieckes auf die Seiten E_2E_3 E_3E_1 E_1E_2 gefällten Senkrechten schneiden. Denn da die Seiten des Dreieckes $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$ denen des Dreieckes $A_1A_2A_3$ parallel sind, die Winkelhalbierungslinien dieses Dreieckes aber auf den Seiten von $E_1E_2E_3$ senkrecht stehen, so müssen auch die von den Eckpunkten des Dreieckes $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$ auf E_rE_s gezogenen Normalen die Winkel $\mathfrak{H}_i$ halbieren, oder ihr Schnittpunkt ist zugleich das Centrum des dem Dreiecke $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$ eingeschriebenen Kreises.

Man hat nun z. B. für die von $\mathfrak{H}_3$ auf E_1E_2 gefällte Senkrechte

$$\begin{vmatrix} x_1 & \sin\tfrac{1}{2}A_2\cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) & 1-\cos A_3 \\ x_2 & \sin\tfrac{1}{2}A_1\cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) & -\cos A_3 + 1 \\ x_3 & -\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2 & -\cos A_1 - \cos A_2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} x_1 & \sin\tfrac{1}{2}A_2\cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) & \sin\tfrac{1}{2}A_3 \\ x_2 & \sin\tfrac{1}{2}A_1\cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) & \sin\tfrac{1}{2}A_3 \\ x_3 & -\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2 & -\cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) \end{vmatrix} = 0.$$

In entwickelter Form erhält x_1 den Koëffizienten

$$\sin\tfrac{1}{2}A_1\,[\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 - \cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)\cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)]$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}A_1\,[\cos(\tfrac{1}{2}A_3 + \tfrac{1}{2}A_1)\cos(\tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{2}A_2) - \cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)\cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)]$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}A_1\,(-2\cos\tfrac{1}{2}A_3\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2 - 2\sin\tfrac{1}{2}A_3\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2)$$
$$= -2\sin^2\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_1\,(\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 + \cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3)$$
$$= -2\sin^2\tfrac{1}{2}A_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_1.$$

Aehnlich für x_2 und x_3. Die Gleichung der Senkrechten erhält dann die Form

$$x_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 - x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_2 + x_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_3\cos\tfrac{1}{2}A_3\sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung statt x_i die oben angegebenen Werte für die Koordinaten des Schnittpunktes von A_1R_1, u. s. w. ein, so genügen diese Werte augenscheinlich der Gleichung, da der Faktor $\sin^2\tfrac{1}{2}A_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_3$ sich heraushebt, der zweite Faktor aber Null gibt. Es liegt also dieser Punkt (Q) auf der von $\mathfrak{H}_3$ auf E_1E_2 gezogenen Normalen.

Dasselbe gilt für die beiden andern Normalen.

Der Punkt Q liegt mit E_0 und P_0 auf einer Geraden.

53. Es liegen je auf einer Geraden

$$\mathfrak{H}_1C_1E_0$$
$$\mathfrak{H}_2C_2E_0$$
$$\mathfrak{H}_3C_3E_0.$$

**

Denn z. B.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\sin\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3 \\ 1 & \sin A_3 & \sin\frac{1}{2}A_3\cos(\frac{1}{2}A_3-\frac{1}{2}A_1) \\ 1 & \sin A_2 & \sin\frac{1}{2}A_2\cos(\frac{1}{2}A_1-\frac{1}{2}A_2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\sin\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3 \\ 0 & 2\sin\frac{1}{2}A_3\cos\frac{1}{2}A_3 & \sin\frac{1}{2}A_3\cos\frac{1}{2}A_3\cos\frac{1}{2}A_1 \\ 0 & 2\sin\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_2 & \sin\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_1\cos\frac{1}{2}A_2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\sin\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3\cos\frac{1}{2}A_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\sin\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3 \\ 0 & 1 & \cos\frac{1}{2}A_1 \\ 0 & 1 & \cos\frac{1}{2}A_1 \end{vmatrix} = 0.$$

54. Die Halbierungspunkte C_i der Seiten A_rA_s halbieren auch die Geraden $\mathfrak{H}_iE_0$.

Es ist

$$C_2C_3 \,//\, A_2A_3, \text{ und } C_2C_3 = \tfrac{1}{2}A_2A_3.$$

Da aber

$$\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3 = A_2A_3,$$

so muss auch

$$C_2C_3 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$$

sein. Dann ist aber auch

$$E_0C_2 = \tfrac{1}{2}E_0\mathfrak{H}_2.$$

Auf den Geraden $E_0\mathfrak{H}_i$ liegen auch die Punkte F_i. (Vergl. Nr. 16.)

X.

55. Es gehen durch einen Punkt die Verbindungsgeraden der Eckpunkte des Fundamentaldreieckes mit den Punkten, in welchen der Feuerbach'sche Kreis des Dreieckes $A_1A_2A_3$ die den Seiten des letztern angeschriebenen Kreise berührt.

Die Gleichung des äussern Berührungskreises E_1 ist

$$\left(x_1\frac{\cos^4\frac{1}{2}A_1}{\sin A_1}+x_2\frac{\sin^4\frac{1}{2}A_2}{\sin A_2}+x_3\frac{\sin^4\frac{1}{2}A_3}{\sin A_3}\right)(x_1\sin A_1+x_2\sin A_2+x_3\sin A_3)$$
$$-\frac{4\cos^2\frac{1}{2}A_1\sin^2\frac{1}{2}A_2\sin^2\frac{1}{2}A_3}{\sin A_1\sin A_2\sin A_3}(x_2x_3\sin A_1+x_3x_1\sin A_2+x_1x_2\sin A_3)=0.$$

Jene des Feuerbach'schen Kreises

$$(x_1\cos A_1+x_2\cos A_2+x_3\cos A_3)(x_1\sin A_1+x_2\sin A_2+x_3\sin A_3)$$
$$-2(x_2x_3\sin A_1+x_3x_1\sin A_2+x_1x_2\sin A_3)=0.$$

Die Radikalaxe beider Kreise hat zur Gleichung

$$\frac{\sin A_1\sin A_2\sin A_3}{\cos^2\frac{1}{2}A_1\sin^2\frac{1}{2}A_2\sin^2\frac{1}{2}A_3}\left(x_1\frac{\cos^4\frac{1}{2}A_1}{\sin A_1}+x_2\frac{\sin^4\frac{1}{2}A_2}{\sin A_2}+x_3\frac{\sin^4\frac{1}{2}A_3}{\sin A_3}\right)$$
$$=2(x_1\cos A_1+x_2\cos A_2+x_3\cos A_3).$$

Entwickelt man, so kommt x_1 mit dem Koëffizienten

$$\cos A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 - 2\cos^3\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}A_1 [\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 - \sin^2\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3$$
$$- 2\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3]$$
$$= -\cos\tfrac{1}{2}A_1 [\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_1 + \sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \,.\, \sin\tfrac{1}{2}A_3 \sin\tfrac{1}{2}A_1 \,.$$
$$+ \cos\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \,.\, \cos\tfrac{1}{2}A_3 \cos\tfrac{1}{2}A_1]$$
$$= -\cos\tfrac{1}{2}A_1 [\cos\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin(\tfrac{1}{2}A_2 + \tfrac{1}{2}A_3) + \text{etc.}]$$
$$= -\cos\tfrac{1}{2}A_1 [\sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \,.\, \cos\tfrac{1}{2}A_3 \cos\tfrac{1}{2}A_1 + \sin\tfrac{1}{2}A_3 \sin\tfrac{1}{2}A_1 \,.\, \cos\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 + \text{etc.}]$$
$$= -\cos\tfrac{1}{2}A_1 \cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) \cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2).$$

Für die Koëffizienten von x_2 und x_3 folgt

$$- \sin\tfrac{1}{2}A_2 \cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) \sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}A_3 \sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) \cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2).$$

Die Gleichung der Radikalaxe wird demnach

$$\frac{x_1 \cos\tfrac{1}{2}A_1}{\sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)} + \frac{x_2 \sin\tfrac{1}{2}A_2}{\cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)} - \frac{x_3 \sin\tfrac{1}{2}A_3}{\cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)} = 0.$$

Da die beiden Kreise sich berühren, so stellt diese Gleichung auch die gemeinsame Tangente derselben dar, und die Koordinaten des Berührungspunktes — $\mathfrak{F}_1$ — (Fig. 17) sind

$$- \sin^2(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)$$
$$\cos^2(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)$$
$$\cos^2(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2).$$

In der That liegt dieser Punkt auf der Centrale M_1E_1 beider Kreise, da die Koordinaten von M_1 sind

$$\cos(A_2 - A_3) = 1 - 2\sin^2(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)$$
$$\cos(A_3 - A_1) = -1 + 2\cos^2(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)$$
$$\cos(A_1 - A_2) = -1 + 2\cos^2(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2).$$

In gleicher Weise findet man als Gleichung für die Radikalaxe des Feuerbach und der Kreise E_2 und E_3

$$- \frac{x_1 \sin\tfrac{1}{2}A_1}{\cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)} + \frac{x_2 \cos\tfrac{1}{2}A_2}{\sin(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)} + \frac{x_3 \sin\tfrac{1}{2}A_3}{\cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)} = 0,$$
$$\frac{x_1 \sin\tfrac{1}{2}A_1}{\cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)} - \frac{x_2 \sin\tfrac{1}{2}A_2}{\cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)} + \frac{x_3 \cos\tfrac{1}{2}A_3}{\sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)} = 0.$$

Daraus erhält man für die Berührungspunkte $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$

$$\begin{array}{ll} \cos^2(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) & \cos^2(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) \\ -\sin^2(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) & \cos^2(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) \\ \cos^2(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) & -\sin^2(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2). \end{array}$$

Die Gleichungen für $A_i\mathfrak{F}_i$ sind

$$A_1\mathfrak{F}_1 \equiv x_2 \cos^2(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) - x_3 \cos^2(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) = 0$$
$$A_2\mathfrak{F}_2 \equiv x_3 \cos^2(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) - x_1 \cos^2(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) = 0$$
$$A_3\mathfrak{F}_3 \equiv x_1 \cos^2(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) - x_2 \cos^2(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) = 0.$$

Die Determinante der Koëffizienten gibt unmittelbar

$$\cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)\cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)\cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)$$
$$- \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)\cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)\cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) = 0.$$

Mithin gehen die Geraden $A_i\mathfrak{F}_i$ durch einen Punkt.

56. Der Schnittpunkt der Geraden $A_i\mathfrak{F}_i$ ($\mathfrak{F}$) liegt auf E_0M_1.

Der Punkt $\mathfrak{F}$ wird bestimmt durch

$$\cos^2(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)$$
$$\cos^2(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)$$
$$\cos^2(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2).$$

Diese Werte genügen der Gleichung

$$E_0M_1 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & 1 & \cos(A_2 - A_3) \\ x_2 & 1 & \cos(A_3 - A_1) \\ x_3 & 1 & \cos(A_1 - A_2) \end{vmatrix} = 0,$$

mithin u. s. w.

57. Es gehen je durch einen Punkt

$$\begin{matrix} A_1\mathfrak{F}_0 & A_1\mathfrak{F}_3 & A_1\mathfrak{F}_2 \\ A_2\mathfrak{F}_3 & A_2\mathfrak{F}_0 & A_2\mathfrak{F}_1 \\ A_3\mathfrak{F}_2 & A_3\mathfrak{F}_1 & A_3\mathfrak{F}_0. \end{matrix}$$

$\mathfrak{F}_0$ ist der Punkt (Fig. 18), in dem der innere Berührungskreis (E_0) den Feuerbach'schen berührt.

Die Gleichung des Kreises E_0 ist

$$\left(x_1\frac{\cos^4\frac{1}{2}A_1}{\sin A_1} + x_2\frac{\cos^4\frac{1}{2}A_2}{\sin A_2} + x_3\frac{\cos^4\frac{1}{2}A_3}{\sin A_3}\right)(x_1\sin A_1 + x_2\sin A_2 + x_3\sin A_3)$$
$$- \frac{4\cos^2\frac{1}{2}A_1\cos^2\frac{1}{2}A_2\cos^2\frac{1}{2}A_3}{\sin A_1\sin A_2\sin A_3}(x_2x_3\sin A_1 + x_3x_1\sin A_2 + x_1x_2\sin A_3) = 0.$$

Die Gleichung des Feuerbach ist, wie oben,

$$(x_1\cos A_1 + x_2\cos A_2 + x_3\cos A_3)(x_1\sin A_1 + x_2\sin A_2 + x_3\sin A_3)$$
$$- 2(x_2x_3\sin A_1 + x_3x_1\sin A_2 + x_1x_2\sin A_3) = 0.$$

Die Radikalaxe beider Kreise, das ist die gemeinschaftliche Tangente derselben, hat zur Gleichung

$$\left(x_1\frac{\cos^4\frac{1}{2}A_1}{\sin A_1} + x_2\frac{\cos^4\frac{1}{2}A_2}{\sin A_2} + x_3\frac{\cos^4\frac{1}{2}A_3}{\sin A_3}\right)\sin A_1\sin A_2\sin A_3$$
$$= 2\cos^2\tfrac{1}{2}A_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\,(x_1\cos A_1 + x_2\cos A_2 + x_3\cos A_3).$$

Der Koëfficient von x_1 wird

$$\cos\tfrac{1}{2}A_1\,[2\cos^2\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 - \cos A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3]$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}A_1\,[2\cos^2\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 + \sin^2\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3]$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}A_1\,[-\cos^2\tfrac{1}{2}A_1\,(\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 - \sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3) + \cos^2\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3 + \text{etc.}]$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}A_1\,[-\cos^2\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_1 + \cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\,.\,\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_3 + \text{etc.}]$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}A_1\,[-\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin(\tfrac{1}{2}A_2 + \tfrac{1}{2}A_3) + \text{etc.}]$$
$$= -\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)\sin(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1).$$

Die Ausdrücke für die Koëffizienten von x_2 und x_3 sind analog. Die Radikalaxe des Feuerbach und des Kreises E_0 ist dann

$$\frac{x_1 \cos\frac{1}{2}A_1}{\sin(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3)} + \frac{x_2 \cos\frac{1}{2}A_2}{\sin(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1)} + \frac{x_3 \cos\frac{1}{2}A_3}{\sin(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2)} = 0.$$

Diese Gerade berührt beide Kreise in dem Punkt

$$\begin{array}{l} \sin^2(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) \\ \sin^2(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1) \\ \sin^2(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2). \end{array}$$

Demnach ist z. B.

$$A_1\mathfrak{F}_0 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & 1 & \sin^2(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) \\ x_2 & 0 & \sin^2(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1) \\ x_3 & 0 & \sin^2(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Oder

$$\begin{aligned} A_1\mathfrak{F}_0 &\equiv x_2 \sin^2(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) - x_3 \sin^2(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) = 0 \\ A_2\mathfrak{F}_3 &\equiv x_3 \cos^2(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) + x_1 \sin^2(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) = 0 \\ A_3\mathfrak{F}_2 &\equiv x_1 \sin^2(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) + x_2 \cos^2(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) = 0. \end{aligned}$$

Da die Determinante der Koëffizienten verschwindet, so gehen diese drei Geraden durch einen Punkt. Ebenso u. s. w.

Aus den Gleichungen für $A_2\mathfrak{F}_3$ und $A_3\mathfrak{F}_2$ ergeben sich folgende Werte für die Koordinaten des Schnittpunktes $\mathfrak{F}'_1$

$$\begin{array}{l} \cos^2(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) \\ -\sin^2(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1) \\ -\sin^2(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2). \end{array}$$

Dieser Punkt liegt auf der Centrale des Berührungskreises E_1 und des Feuerbach (Fig. 18), denn es ist

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos(A_2 - A_3) & \cos^2(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) \\ 1 & \cos(A_3 - A_1) & -\sin^2(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1) \\ 1 & \cos(A_1 - A_2) & -\sin^2(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Ebenso liegt $\mathfrak{F}_2'$ auf E_2M_1 und $\mathfrak{F}_3'$ auf E_3M_1.

58. Es gehen je durch einen Punkt

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3 & \mathfrak{F}_3\mathfrak{F}_1 & \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \\ A_2A_3 & A_3A_1 & A_1A_2 \\ E_2E_3 & E_3E_1 & E_1E_2. \end{array}$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes von A_2A_3 und E_2E_3 (N_1') sind 0, —1, 1. Und es ist

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos^2(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) & \cos^2(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) \\ -1 & -\sin^2(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1) & \cos^2(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1) \\ 1 & \cos^2(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2) & -\sin^2(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cos^2(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) \\ -1 & -1 & \cos^2(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1) \\ 1 & 1 & -\sin^2(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Bemerkung. Durch dieselben Punkte (N_i') gehen auch die Geraden $\mathfrak{F}_r'\mathfrak{F}_s'$, wie sich leicht beweisen lässt. Da nun auch (Nr. 12) $\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_s$ durch

den Schnittpunkt von $A_r A_s$ und $E_r E_s$ gehen, so schneiden sich je in einem Punkt die Geraden

$$A_r A_s,\ E_r E_s,\ \mathfrak{A}_r \mathfrak{A}_s,\ \mathfrak{F}_r \mathfrak{F}_s,\ \mathfrak{F}_r' \mathfrak{F}_s'.$$

59. Bezeichnet man die Mittelpunkte der den Dreiecken $A_2A_3E_1$ $A_3A_1E_2$ $A_1A_2E_3$ umgeschriebenen Kreise mit $\mathfrak{M}_1$ $\mathfrak{M}_2$ $\mathfrak{M}_3$, so liegen die Schnittpunkte von

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3 & \text{und} & \mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3 \\ \mathfrak{M}_3\mathfrak{M}_1 & & \mathfrak{H}_3\mathfrak{H}_1 \\ \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 & & \mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2 \end{array}$$

auf einer Geraden. Diese Gerade ist die Radikalaxe des Kreises E_0 und des Feuerbach.

Die Punkte $\mathfrak{M}_i$ (Fig. 19) liegen auf den Geraden $A_i E_i$ und zugleich auf dem dem Dreiecke $A_1A_2A_3$ umgeschriebenen Kreis, da dieser der Feuerbach'sche des Dreieckes $E_1E_2E_3$ ist. Die Gleichung dieses Kreises ist

$$x_2 x_3 \sin A_1 + x_1 x_3 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3 = 0.$$

Dieselbe liefert, in Verbindung mit den Gleichungen der Geraden $E_0 E_i$, für die Koordinaten der Punkte $\mathfrak{M}_i$ die Werte

$$\begin{array}{ccc} -\sin A_1 & \sin A_3 + \sin A_1 & \sin A_1 + \sin A_2 \\ \sin A_2 + \sin A_3 & -\sin A_2 & \sin A_1 + \sin A_2 \\ \sin A_2 + \sin A_3 & \sin A_3 + \sin A_1 & -\sin A_3 \end{array}.$$

Daraus entnimmt man

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3 &\equiv -x_1 \sin A_1 + x_2(\sin A_3 + \sin A_1) + x_3(\sin A_1 + \sin A_2) = 0 \\ \mathfrak{M}_3\mathfrak{M}_1 &\equiv x_1(\sin A_2 + \sin A_3) - x_2 \sin A_2 + x_3(\sin A_1 + \sin A_2) = 0 \\ \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 &\equiv x_1(\sin A_2 + \sin A_3) + x_2(\sin A_3 + \sin A_1) - x_3 \sin A_3 = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen für $\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$, u. s. w. (Nr. 47) sind

$$\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3 \equiv -x_1 \sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) + x_3 \sin A_3 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) = 0,$$

u. s. w.

Die Koordinaten des Schnittpunktes von $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ und $\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$ berechnen sich in folgender Weise

$$\begin{aligned} a_2 a_3' - a_2' a_3 &\equiv (\sin A_3 + \sin A_1) \sin A_3 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) \\ &\quad - (\sin A_1 + \sin A_2) \sin A_2 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) \\ &\equiv -\cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)(\sin A_2 - \sin A_3)(\sin A_1 + \sin A_2 + \sin A_3); \\ a_3 a_1' - a_3' a_1 &\equiv -\sin A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_1 (\sin A_1 + \sin A_2) + 2\sin A_1 \sin A_3 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) \\ &\equiv -\sin\tfrac{1}{2}A_1 [-2\cos\tfrac{1}{2}A_1 \sin A_3 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) + \sin A_1(\sin A_1 + \sin A_2)] \\ &\equiv -\sin\tfrac{1}{2}A_1 [-2\sin(\tfrac{1}{2}A_2 + \tfrac{1}{2}A_3)\cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)\sin A_3 + \text{etc.}] \\ &\equiv -\sin\tfrac{1}{2}A_1 [-(\sin A_2 + \sin A_3)\sin A_3 + \sin A_1(\sin A_1 + \sin A_2)] \\ &\equiv \sin\tfrac{1}{2}A_1 (\sin A_3 - \sin A_1)(\sin A_1 + \sin A_2 + \sin A_3), \end{aligned}$$

indem man nämlich innerhalb der Klammern $\sin A_1 \sin A_2$ addirt und subtrahirt. Durch analoge Rechnung findet man

$$a_1 a_2' - a_1' a_2 \equiv \sin\tfrac{1}{2}A_1 (\sin A_1 - \sin A_2)(\sin A_1 + \sin A_2 + \sin A_3).$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ und $\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$ können sohin geschrieben werden

$$-\cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)(\sin A_2 - \sin A_3)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}A_1 (\sin A_3 - \sin A_1)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}A_1 (\sin A_1 - \sin A_2).$$

Für die Schnittpunkte von $\mathfrak{M}_3\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{H}_3\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2$ folgt

$$\begin{array}{ll} \sin\tfrac{1}{2}A_2 (\sin A_2 - \sin A_3) & \sin\tfrac{1}{2}A_3 (\sin A_2 - \sin A_3) \\ -\cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)(\sin A_3 - \sin A_1) & \sin\tfrac{1}{2}A_3 (\sin A_3 - \sin A_1) \\ \sin\tfrac{1}{2}A_2 (\sin A_1 - \sin A_2) & -\cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)(\sin A_1 - \sin A_2). \end{array}$$

Die Bedingung dafür, dass diese drei Punkte auf einer Geraden liegen, ist das Verschwinden der Determinante ihrer Koordinaten. Dieselbe reduziert sich, da der Faktor

$$(\sin A_2 - \sin A_3)(\sin A_3 - \sin A_1)(\sin A_1 - \sin A_2)$$

herausgehoben werden kann, auf

$$\begin{vmatrix} -\cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) & \sin\tfrac{1}{2}A_2 & \sin\tfrac{1}{2}A_3 \\ \sin\tfrac{1}{2}A_1 & -\cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) & \sin\tfrac{1}{2}A_3 \\ \sin\tfrac{1}{2}A_1 & \sin\tfrac{1}{2}A_2 & -\cos(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) \end{vmatrix}$$

Indem man beachtet, dass

$$\sin\tfrac{1}{2}A_1 = \cos(\tfrac{1}{2}A_2 + \tfrac{1}{2}A_3), \text{ u. s. w.},$$

lässt sich obige Determinante auf die Form bringen

$$m \begin{vmatrix} -\cos\tfrac{1}{2}A_3 & 0 & \cos\tfrac{1}{2}A_1 \\ 0 & \cos\tfrac{1}{2}A_3 & \cos\tfrac{1}{2}A_2 \\ 1 & \sin\tfrac{1}{2}A_3 & -\sin\tfrac{1}{2}A_2 \end{vmatrix}$$
$$= m\,[\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\sin\tfrac{1}{2}A_2 + \cos\tfrac{1}{2}A_3\sin\tfrac{1}{2}A_3\cos\tfrac{1}{2}A_2 - \cos\tfrac{1}{2}A_3\cos\tfrac{1}{2}A_1)$$
$$= m\,[\cos\tfrac{1}{2}A_3(\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 + \cos\tfrac{1}{2}A_2\sin\tfrac{1}{2}A_3) - \cos\tfrac{1}{2}A_3\cos\tfrac{1}{2}A_1]$$
$$= m\,[\cos\tfrac{1}{2}A_3\cos\tfrac{1}{2}A_1 - \cos\tfrac{1}{2}A_3\cos\tfrac{1}{2}A_1] = 0.$$

Es liegen also jene Punkte auf einer Geraden.

Indem man die Ausdrücke $\sin A_2 - \sin A_3$, u. s. w. in die entsprechenden Produkte auflöst, ergibt sich als Gleichung der Geraden, auf welcher jene Schnittpunkte liegen

$$\begin{vmatrix} x_1 & -\cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)\sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) & \sin\tfrac{1}{2}A_1\sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) \\ x_2 & \sin\tfrac{1}{2}A_2\sin(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) & -\cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)\sin(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) \\ x_3 & \sin\tfrac{1}{2}A_3\sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) & \sin\tfrac{1}{2}A_3\sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) \end{vmatrix} = 0.$$

In entwickelter Form hat x_1 den Koëffizienten

$$\sin\tfrac{1}{2}A_3\sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)\sin(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)[\sin\tfrac{1}{2}A_2 + \cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)]$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}A_3\sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)\sin(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)[\cos(\tfrac{1}{2}A_3 + \tfrac{1}{2}A_1) + \cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)]$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}A_3\cos\tfrac{1}{2}A_3 \,.\, \cos\tfrac{1}{2}A_1\sin(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)\sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2).$$

Und es kommt

$$x_1\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)\sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) + x_2\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)\sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)$$
$$+ x_3\cos\tfrac{1}{2}A_3\sin(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)\sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) = 0.$$

Oder

$$\frac{x_1 \cos\frac{1}{2}A_1}{\sin(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3)} + \frac{x_2 \cos\frac{1}{2}A_2}{\sin(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1)} + \frac{x_3 \cos\frac{1}{2}A_3}{\sin(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2)} = 0.$$

Dies ist aber (Nr. 57) die Gleichung der Chordale des Feuerbach und des dem Fundamentaldreieck $A_1 A_2 A_3$ eingeschriebenen Kreises.

Folgerung. Da die beiden Dreiecke $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3$ und $\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2 \mathfrak{H}_3$ so gelegen sind, dass die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden liegen, so gehen durch einen Punkt

$$\mathfrak{M}_1 \mathfrak{H}_1$$
$$\mathfrak{M}_2 \mathfrak{H}_2$$
$$\mathfrak{M}_3 \mathfrak{H}_3.$$

60. Der Punkt, in welchem sich die Geraden $\mathfrak{M}_i \mathfrak{H}_i$ schneiden, liegt auf dem dem Fundamentaldreiecke umgeschriebenen Kreis.

Zur Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden $\mathfrak{M}_i \mathfrak{H}_i$ (D in Fig. 19) hat man

$$\mathfrak{M}_1 \mathfrak{H}_1 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & -\sin A_1 & -\sin\frac{1}{2}A_2 \sin\frac{1}{2}A_3 \\ x_2 & \sin A_2 + \sin A_3 & \sin\frac{1}{2}A_3 \cos(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1) \\ x_3 & \sin A_2 + \sin A_3 & \sin\frac{1}{2}A_2 \cos(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2) \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\begin{vmatrix} x_1 & -\sin\frac{1}{2}A_1 & -\sin\frac{1}{2}A_2 \sin\frac{1}{2}A_3 \\ x_2 & \cos(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) & \sin\frac{1}{2}A_3 \cos(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1) \\ x_3 & \cos(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) & \sin\frac{1}{2}A_2 \cos(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Der Koëfficient von x_1 ist

$$\cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)[\sin\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 - \sin\tfrac{1}{2}A_3 \cos\tfrac{1}{2}A_3 \cos\tfrac{1}{2}A_1 + \sin^2\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_1$$
$$- \sin^2\tfrac{1}{2}A_3 \sin\tfrac{1}{2}A_1]$$
$$= \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) \sin\tfrac{1}{2}A_1 [\cos\tfrac{1}{2}A_1 \sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) + \sin^2\tfrac{1}{2}A_2 - \sin^2\tfrac{1}{2}A_3]$$
$$= \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) \sin\tfrac{1}{2}A_1 [\cos\tfrac{1}{2}A_1 \sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) + \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 - \cos^2\tfrac{1}{2}A_2]$$
$$= \cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_3) \sin\tfrac{1}{2}A_1 [\cos\tfrac{1}{2}A_1 \sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) + \tfrac{1}{2}(\cos A_3 - \cos A_2)]$$
$$= \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) \sin\tfrac{1}{2}A_1 . 2\cos\tfrac{1}{2}A_1 \sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)$$
$$= \sin A_1 \sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3).$$

Für x_2 und x_3 kommt

$$- \sin A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)$$
$$- \sin A_3 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2).$$

Und es ist

$$\mathfrak{M}_1 \mathfrak{H}_1 \equiv - x_1 \sin A_1 \sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) + x_2 \sin A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin(\tfrac{1}{2}A_3$$
$$- \tfrac{1}{2}A_1) + x_3 \sin A_3 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) = 0.$$

Analog findet man

$$\mathfrak{M}_2 \mathfrak{H}_2 \equiv x_1 \sin A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) - x_2 \sin A_2 \sin(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) \cos(\tfrac{1}{2}A_3$$
$$- \tfrac{1}{2}A_1) + x_3 \sin A_3 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) = 0.$$

Aus beiden Gleichungen ergeben sich als Werte der Koordinaten des Schnittpunktes (D)

$$\cos\tfrac{1}{2}A_1 \sin A_2 \sin A_3 \sin(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)\sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}A_2 \sin A_3 \sin A_1 \sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)\sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}A_3 \sin A_1 \sin A_2 \sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)\sin(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1),$$

zu welchen Ausdrücken noch der Faktor $\sin A_3$ tritt.

Diese Werte genügen nun der Gleichung des dem Dreiecke $A_1A_2A_3$ umgeschriebenen Kreises; dieselbe hat die Form

$$x_2x_3\sin A_1 + x_3x_1\sin A_2 + x_1x_2\sin A_3 = 0.$$

Hebt man nämlich den gemeinschaftlichen Faktor heraus, so bleibt noch — indem man mit 2 multiplizirt —

$$2\sin A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) + 2\sin A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)$$
$$+ 2\sin A_3 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)$$
$$= \sin A_1(\sin A_2 - \sin A_3) + \sin A_2(\sin A_3 - \sin A_1) + \sin A_3(\sin A_1 - \sin A_2) = 0.$$

Es liegt also der Punkt D auf dem durch A_i gehenden Kreis.

61. D e r S c h n i t t p u n k t d e r $\mathfrak{M}_i\mathfrak{H}_i$ (D) l i e g t m i t d e m S c h w e r p u n k t (S) d e s D r e i e c k e s $A_1A_2A_3$ u n d d e m B e r ü h r u n g s p u n k t ($\mathfrak{F}$) d e s F e u e r b a c h u n d d e s e i n g e s c h r i e b e n e n K r e i s e s a u f e i n e r G e r a d e n.

Die Koordinaten des Punktes D lassen sich, der Reihe nach, in folgender Form schreiben — dazu noch der Faktor $^1/_4\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_3 \,.\, \sin A_3$ —

$$(\sin A_3 - \sin A_1)(\sin A_1 - \sin A_2)$$
$$(\sin A_1 - \sin A_2)(\sin A_2 - \sin A_3)$$
$$(\sin A_2 - \sin A_3)(\sin A_3 - \sin A_1);$$

$$\sin A_1(-\sin A_1 + \sin A_2 + \sin A_3) - \sin A_2 \sin A_3$$
$$\sin A_2(\sin A_1 - \sin A_2 + \sin A_3) - \sin A_3 \sin A_1$$
$$\sin A_3(\sin A_1 + \sin A_2 - \sin A_3) - \sin A_1 \sin A_2;$$

$$8\sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \,.\, \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 - \sin A_2 \sin A_3$$
$$8\sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \,.\, \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 - \sin A_3 \sin A_1$$
$$8\sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \,.\, \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 - \sin A_1 \sin A_2.$$

Die Punkte S und $\mathfrak{F}_0$ werden dargestellt bezüglich durch

$$\sin A_2 \sin A_3,\ \text{etc. und } \sin^2(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3),\ \text{etc.}$$

Bildet man die Determinante der Koordinaten dieser drei Punkte und subtrahirt die Koordinaten von S von denjenigen des Punktes D, so lässt sich $8\sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3$ herausheben, und es kommt

$$\begin{vmatrix} \cos^2\tfrac{1}{2}A_1 & \sin A_2 \sin A_3 & \sin^2(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) \\ \cos^2\tfrac{1}{2}A_2 & \sin A_3 \sin A_1 & \sin^2(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) \\ \cos^2\tfrac{1}{2}A_3 & \sin A_1 \sin A_2 & \sin^2(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 + \cos A_1 & \sin A_2 \sin A_3 & 1 - \cos(A_2 - A_3) \\ 1 + \cos A_2 & \sin A_3 \sin A_1 & 1 - \cos(A_3 - A_1) \\ 1 + \cos A_3 & \sin A_1 \sin A_2 & 1 - \cos(A_1 - A_2) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-2}{4}\begin{vmatrix} 1-\cos(A_2+A_3) & \sin A_2 \sin A_3 & \sin A_2 \sin A_3 \\ 1-\cos(A_3+A_1) & \sin A_3 \sin A_1 & \sin A_3 \sin A_1 \\ 1-\cos(A_1+A_2) & \sin A_1 \sin A_2 & \sin A_1 \sin A_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Also liegen D, S und $\mathfrak{F}_0$ auf einer Geraden (Fig. 20).

62. Zwischen D, S und $\mathfrak{F}_0$ besteht die Beziehung:

$$DS = 2S\mathfrak{F}_0.$$

Zunächst lässt sich beweisen, dass (Fig. 20)

$$A_1D \,//\, \mathfrak{F}_0C_1$$

ist, wo C_1 den Halbierungspunkt auf A_2A_3 bezeichnet. Die Gleichung der Geraden A_1D wird — die Koordinaten von D siehe Nr. 60 —

$$A_1D \equiv x_2 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) - x_3 \sin\tfrac{1}{2}A_3 \sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) = 0.$$

Ferner ist

$$C_1\mathfrak{F}_0 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \sin^2(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) \\ x_2 & \sin A_3 & \sin^2(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) \\ x_3 & \sin A_2 & \sin^2(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) \end{vmatrix}$$

$$\equiv x_1\,[\sin A_3 \sin^2(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) - \sin A_2 \sin^2(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)] + x_2 \sin A_2 \sin^2(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)$$
$$- x_3 \sin A_3 \sin^2(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) = 0.$$

Multiplizirt man den Koëffizienten von x_1 mit 2, so wird er

$$\sin A_3\,[1-\cos(A_1 - A_2)] - \sin A_2\,[1 - \cos(A_3 - A_1)]$$
$$= \sin A_3 - \sin A_2 - \sin A_3 \cos A_1 \cos A_2 + \sin A_2 \cos A_3 \cos A_1$$
$$= -(\sin A_2 - \sin A_3) + \cos A_1 \sin(A_2 - A_3)$$
$$= -2\sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) + 2\cos A_1 \sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)\cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)$$
$$= 2\sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)\,[-\sin\tfrac{1}{2}A_1 + \cos A_1 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)]$$
$$= 4\sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)\,[\sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 - \sin^2\tfrac{1}{2}A_1 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)].$$

Die Gleichung von $C_1\mathfrak{F}_0$ gestaltet sich dann folgendermassen

$$C_1\mathfrak{F}_0 \equiv x_1\,[2\sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)] + x_2 \sin A_2 \sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)$$
$$- x_3 \sin A_3 \sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) = 0.$$

Die Bedingung für den Parallelismus der beiden Geraden ist das Verschwinden der aus den Koëffizienten der Gleichungen der Geraden und $\sin A_1$ $\sin A_2$ $\sin A_3$ gebildeten Determinante. Subtrahirt man in derselben die zweite Kolumne von der dritten und hebt den Faktor $\sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)$ heraus, so erhält man den Ausdruck

$$\begin{vmatrix} \sin A_1 & \sin A_2 & -\sin\tfrac{1}{2}A_1 \\ 0 & \sin A_3 - \sin A_1 & \sin\tfrac{1}{2}A_1 \\ 2\sin\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) & \sin A_2 \sin(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) & -\cos\tfrac{1}{2}A_1 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \sin\frac{1}{2}A_1\cos\frac{1}{2}A_1 & 4\cos\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3 & 0 \\ 0 & 2\sin\frac{1}{2}A_2\sin(\frac{1}{2}A_3-\frac{1}{2}A_1) & \sin\frac{1}{2}A_1 \\ \sin\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3-2\sin^2\frac{1}{2}A_1\cos(\frac{1}{2}A_2-\frac{1}{2}A_3) & 2\sin\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_2\sin(\frac{1}{2}A_2-\frac{1}{2}A_3) & -\cos\frac{1}{2}A_1\cos(\frac{1}{2}A_2-\frac{1}{2}A_3) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \sin\frac{1}{2}A_1\cos\frac{1}{2}A_1 & 2\cos\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_3 & 0 \\ \sin\frac{1}{2}A_1\cos\frac{1}{2}A_1 & \sin(\frac{1}{2}A_3-\frac{1}{2}A_1) & \sin\frac{1}{2}A_1 \\ -\cos\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_3 & \cos\frac{1}{2}A_2\sin(\frac{1}{2}A_2-\frac{1}{2}A_3) & -\cos\frac{1}{2}A_1\cos(\frac{1}{2}A_2-\frac{1}{2}A_3) \end{vmatrix}\times 2\sin\frac{1}{2}A_2$$

$$=\begin{vmatrix} \sin\frac{1}{2}A_1 & 2\sin\frac{1}{2}A_3 & 0 \\ 0 & -\cos\frac{1}{2}A_2 & \sin\frac{1}{2}A_1 \\ -\cos\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_3 & -2\cos^2\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3 & -2\cos\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3 \end{vmatrix}\times 2\sin\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_1$$

$$=4\sin\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_1\cos\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3\,[\sin\frac{1}{2}A_1\cos\frac{1}{2}A_2+\cos\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2-\cos\frac{1}{2}A_3]=0.$$

Da dieser Ausdruck Null gibt, so ist in der That

$$A_1D\,//\,\mathfrak{F}_0C_1.$$

Nun wird A_1C_1 in S so getheilt, dass $A_1S=2SC_1$ ist. Folglich ist auch

$$DS=2S\mathfrak{F}_0.$$

63. Die Gerade, welche den Punkt D mit dem Centrum des dem Dreieck $A_1A_2A_3$ umgeschriebenen Kreis verbindet, steht senkrecht auf der Radikalaxe des Feuerbach und des Kreises E_0.

Nach Nr. 62 ist (Fig. 20)

$$DS=2S\mathfrak{F}_0.$$

Es ist aber auch

$$MS=2SM_1.$$

Daraus folgt, dass

$$\triangle DSM\sim\mathfrak{F}_0M_1S \text{ und } DM\,//\,M_1\mathfrak{F}_0.$$

ist. Da aber die Centrale M_1E_0 auf der Radikalaxe (p_0) senkrecht steht, so bildet Letztere auch mit DM einen rechten Winkel.

64. Der Mittelpunkt des dem Dreiecke $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$ eingeschriebenen Kreises liegt auf DM.

Der Punkt Q hat die Koordinaten (Nr. 52)

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_3$$
$$\sin^2\tfrac{1}{2}A_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_1$$
$$\sin^2\tfrac{1}{2}A_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_2.$$

Und es ist — wenn $\sin\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3$ mit m bezeichnet wird

$$\begin{vmatrix} \cos A_1 & \sin^2\frac{1}{2}A_2\sin^2\frac{1}{2}A_3 & 8m\cos^2\frac{1}{2}A_1-\sin A_2\sin A_3 \\ \cos A_2 & \sin^2\frac{1}{2}A_3\sin^2\frac{1}{2}A_1 & 8m\cos^2\frac{1}{2}A_2-\sin A_3\sin A_1 \\ \cos A_3 & \sin^2\frac{1}{2}A_1\sin^2\frac{1}{2}A_2 & 8m\cos^2\frac{1}{2}A_3-\sin A_1\sin A_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \cos A_1 & \sin^2\frac{1}{2}A_2\sin^2\frac{1}{2}A_3 & 8m\cos^2\frac{1}{2}A_1-4m \\ \cos A_2 & \sin^2\frac{1}{2}A_3\sin^2\frac{1}{2}A_1 & 8m\cos^2\frac{1}{2}A_2-4m \\ \cos A_3 & \sin^2\frac{1}{2}A_1\sin^2\frac{1}{2}A_2 & 8m\cos^2\frac{1}{2}A_3-4m \end{vmatrix}$$

$$=4m \begin{vmatrix} \cos A_1 & \sin^2\frac{1}{2}A_2 \sin^2\frac{1}{2}A_3 & \cos A_1 \\ \cos A_2 & \sin^2\frac{1}{2}A_3 \sin^2\frac{1}{2}A_1 & \cos A_2 \\ \cos A_3 & \sin^2\frac{1}{2}A_1 \sin^2\frac{1}{2}A_2 & \cos A_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Folglich liegen die Punkte D Q M auf einer Geraden (Fig. 20).

65. Verbindet man den Schnittpunkt (D′) der Geraden $\mathfrak{A}S$ und HQ durch eine Gerade mit D, so ist diese Gerade parallel mit $\mathfrak{F}_0\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{A}$ ist der Punkt, in welchem sich E_1R_0 E_2S_0 E_3T_0 schneiden, H der Schnittpunkt der Höhen des Fundamentaldreieckes. Es ist nun (Fig. 20)

$$MS = \tfrac{1}{2}SH \text{ und } E_0S = \tfrac{1}{2}SQ,$$

mithin

$$\mathfrak{A}E_0 // HD',$$

und

$$\mathfrak{A}S = \tfrac{1}{2}SD'.$$

Da aber auch

$$\mathfrak{F}_0S = \tfrac{1}{2}SD$$

ist, so folgt

$$DD' // F_0\mathfrak{A}.$$

Die Koordinaten von D′

$$\begin{aligned} &\sin A_2 \sin A_3 (1 - 2\sin\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3) \\ &\sin A_3 \sin A_1 (1 - 2\cos\tfrac{1}{2}A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_2 \cos\tfrac{1}{2}A_3) \\ &\sin A_1 \sin A_2 (1 - 2\cos\tfrac{1}{2}A_1 \cos\tfrac{1}{2}A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_3) \end{aligned}$$

ergeben sich aus den Gleichungen

$$\mathfrak{A}S \equiv x_1 \sin A_1 (\cos A_2 - \cos A_3) + x_2 \sin A_2 (\cos A_3 - \cos A_1) + x_3 \sin A_3 (\cos A_1 - \cos A_2) = 0$$

$$HQ \equiv x_1 \cos A_1 \sin^2\tfrac{1}{2}A_1 (\cos A_2 - \cos A_3) + x_2 \cos A_2 \sin^2\tfrac{1}{2}A_2 (\cos A_3 - \cos A_1) + x_3 \cos A_3 \sin^2\tfrac{1}{2}A_3 (\cos A_1 - \cos A_2) = 0$$

XI.

66. Die drei Radikalaxen der Kreise E_2 E_3 E_1 gehen durch die Mittelpunkte der Feuerbach'schen Kreise der Dreiecke $A_2A_3E_1$ $A_3A_1E_2$ $A_1A_2E_3$.

Es sei (Fig. 21) p_3 die Radikalaxe der Kreise E_1 und E_2. Dann ist

$$p_3 // A_3E_3,$$

und, da der Mittelpunkt des dem Dreieck $A_1A_2E_3$ umgeschriebenen Kreises ($\mathfrak{M}_3$) auf A_3E_3 liegt, auch

$$p_3 // \mathfrak{M}_3E_3.$$

Ferner ist

$$E_3\mathfrak{S}_3 = 2\mathfrak{S}_3C_3.$$

Sohin wird die Gerade $\mathfrak{M}_3\mathfrak{S}_3$ von p_3 im Punkte $\mathfrak{C}_3$ so geschnitten, dass

$$\mathfrak{M}_3\mathfrak{S}_3 = 2\mathfrak{S}_3\mathfrak{C}_3$$

ist. Dann muss aber $\mathfrak{C}_3$ eben das Centrum des Feuerbach des Dreieckes $A_1A_2E_3$ sein, da nur für diesen Punkt obige Relation gilt.

67. Die Radikalaxen des Kreises E_0 mit den Kreisen E_i berühren die Feuerbach'schen der Dreiecke $A_r A_s E_i$.

Die betreffenden gehen durch C_i und stehen auf p_i senkrecht, sohin auch auf den Radien der Feuerbach'schen Kreise.

68. Die Berührungspunkte ($\mathfrak{F}_i$) der Kreise E_i mit dem Feuerbach des Fundamentaldreieckes liegen auf den Feuerbach'schen Kreisen der Dreiecke $A_r A_s E_i$.

Der Feuerbach'sche Kreis des Dreieckes $A_1 A_2 E_3$ geht durch die Fusspunkte der Höhen dieses Dreieckes. Die Gleichungen der Höhen auf $A_2 E_3$ und $A_1 E_3$ sind

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 - \cos A_2 \\ x_2 & 0 & -\cos A_3 - \cos A_1 \\ x_3 & 0 & -\cos A_2 + 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ und } \begin{vmatrix} x_1 & 0 & -\cos A_3 - \cos A_2 \\ x_2 & 1 & 1 - \cos A_2 \\ x_3 & 0 & -\cos A_2 + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Oder

$$x_2 \sin\tfrac{1}{2}A_2 + x_3 \cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) = 0$$
$$x_1 \sin\tfrac{1}{2}A_1 + x_3 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) = 0.$$

Daraus ergeben sich für die Koordinaten der Fusspunkte dieser beiden Geraden auf $A_2 E_3$ und $A_1 E_3$ die Werte

$$\begin{matrix} \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) & \qquad \sin\tfrac{1}{2}A_2 \\ \sin\tfrac{1}{2}A_1 & \qquad \cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) \\ -\sin\tfrac{1}{2}A_1 & \qquad -\sin\tfrac{1}{2}A_2 \end{matrix}$$

Die allgemeine Form der Kreisgleichung ist

$$\left(x_1 \frac{a_{11}}{\sin A_1} + x_2 \frac{a_{22}}{\sin A_2} + x_3 \frac{a_{33}}{\sin A_3}\right)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3)$$
$$- k(x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3) = 0.$$

Die Koëffizienten a_{ii} bestimmen sich durch Einsetzen obiger Werte in die Gleichung. Man erhält

$$\left(\frac{a_{11}}{\sin A_1} \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) + \frac{a_{22}}{\sin A_2} \sin\tfrac{1}{2}A_1 - \frac{a_{33}}{\sin A_3} \sin\tfrac{1}{2}A_1\right)$$
$$\times (\sin A_1 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) + \sin A_1 \sin\tfrac{1}{2}A_1 - \sin A_3 \sin\tfrac{1}{2}A_1)$$
$$+ [-\sin A_1 \sin^2\tfrac{1}{2}A_1 - \sin A_2 \sin\tfrac{1}{2}A_1 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) + \sin A_3 \sin\tfrac{1}{2}A_1 \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)] = 0.$$

Oder

$$\left(\frac{a_{11}}{\sin A_1} \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) + \frac{a_{22}}{\sin A_3} \sin\tfrac{1}{2}A_1 - \frac{a_{33}}{\sin A_3} \sin\tfrac{1}{2}A_1\right) \times 2\sin A_2 = 2\sin\tfrac{1}{2}A_1 \sin A_2 \cos A_3,$$

oder endlich

$$\frac{a_{11}}{\sin A_1} \cos(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3) + \frac{a_{22}}{\sin A_2} \sin\tfrac{1}{2}A_1 - \frac{a_{33}}{\sin A_3} \sin\tfrac{1}{2}A_1 = \sin\tfrac{1}{2}A_1 \cos A_3.$$

In ähnlicher Weise findet man, indem man die Koordinaten des Fusspunktes der zweiten Höhe einsetzt,

$$\frac{a_{11}}{\sin A_1} \sin\tfrac{1}{2}A_2 + \frac{a_{22}}{\sin A_2} \cos(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) - \frac{a_{33}}{\sin A_3} \sin\tfrac{1}{2}A_2 = \sin\tfrac{1}{2}A_2 \cos A_3.$$

Durch Elimination des $\frac{a_{33}}{\sin A_3}$ aus beiden Gleichungen gelangt man zu

$$\frac{a_{11}}{\sin A_1}\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 - \frac{a_{22}}{\sin A_2}\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 = 0. \quad (1)$$

Da der fragliche Kreis auch durch den Halbierungspunkt auf $A_1 A_2$ geht, dessen Koordinaten $\sin A_2$ $\sin A_1$ 0 sind, so hat man noch die Bedingung

$$\frac{a_{11}}{\sin A_1}\sin A_2 + \frac{a_{22}}{\sin A_2}\sin A_1 = \sin\tfrac{1}{2}A_3. \quad (2)$$

Aus dieser und der Gleichung (1) folgt

$$\frac{a_{11}}{\sin A_1} = \frac{\sin\frac{1}{2}A_3\sin\frac{1}{2}A_1}{\sin\frac{1}{2}A_2}$$

$$\frac{a_{22}}{\sin A_2} = \frac{\sin\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3}{\sin\frac{1}{2}A_1}.$$

In weiterer Rechnung findet man

$$\frac{a_{33}}{\sin A_2} = \frac{\sin\frac{1}{2}A_3\cos^2\frac{1}{2}A_3 + 2\sin\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2\cos A_3}{\sin\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2}.$$

Die Gleichung des Kreises erhält sohin die Form

$$\left(x_1\frac{\sin\frac{1}{2}A_3\sin\frac{1}{2}A_1}{\sin\frac{1}{2}A_2} + x_2\frac{\sin\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3}{\sin\frac{1}{2}A_1} + x_3\frac{\sin\frac{1}{2}A_3\cos^2\frac{1}{2}A_3 + 2\sin\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2\cos A_3}{\sin\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2}\right)$$
$$\times(x_1\sin A_1 + x_2\sin A_2 + x_3\sin A_3)$$
$$-(2\,x_2x_3\sin A_1 + x_3x_1\sin A_2 + x_1x_2\sin A_3) = 0.$$

Da der Feuerbach'sche Kreis des Fundamentaldreieckes dargestellt wird durch

$$(x_1\cos A_1 + x_2\cos A_2 + x_3\cos A_3)(x_1\sin A_1 + x_2\sin A_2 + x_3\sin A_3)$$
$$-(x_2x_3\sin A_1 + x_3x_1\sin A_2 + x_1x_2\sin A_3) = 0,$$

so hat man als Gleichung der Radikalaxe dieser beiden Kreise, das ist hier der Durchschnittssehne derselben

$$x_1\frac{\sin\frac{1}{2}A_3\sin\frac{1}{2}A_1}{\sin\frac{1}{2}A_2} + x_2\frac{\sin\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3}{\sin\frac{1}{2}A_1} + x_3\frac{\sin\frac{1}{2}A_3\cos^2\frac{1}{2}A_3 + 2\sin\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2\cos A_3}{\sin\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2}$$
$$= x_1\cos A_1 + x_2\cos A_2 + x_3\cos A_3.$$

Oder

$$x_1\frac{\cos\frac{1}{2}A_1}{\sin\frac{1}{2}A_2}\sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) - x_2\frac{\cos\frac{1}{2}A_2}{\sin\frac{1}{2}A_1}\sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)$$
$$+ x_3\frac{\cos\frac{1}{2}A_1\cos\frac{1}{2}A_2\cos^2\frac{1}{2}A_3 - \sin\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2\sin^2\frac{1}{2}A_3}{\sin\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2} = 0.$$

Multiplizirt man ein jedes Glied dieser Gleichung mit $-2\sin\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2\sin(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2)$, so kommt

$$-x_1\sin A_1\sin^2(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) + x_2\sin A_2\sin^2(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)$$
$$-x_3\,.\,2(\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 - \sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_3)\sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) = 0. \quad (3)$$

Für die Verbindungslinie der Punkte C_3 und $\mathfrak{F}_3$ — die Koordinaten des letzteren siehe Nr. 55 — findet man nun direkt

$$\begin{vmatrix} x_1 & \sin A_2 & \cos^2(\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3) \\ x_2 & \sin A_1 & \cos^2(\frac{1}{2}A_3 - \frac{1}{2}A_1) \\ x_3 & 0 & -\sin^2(\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Oder

$$-x_1\sin A_1\sin^2(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2) + x_2\sin A_2\sin^2(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)$$
$$+x_3[\sin A_2\cos^2(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1) - \sin A_1\cos^2(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)] = 0.$$

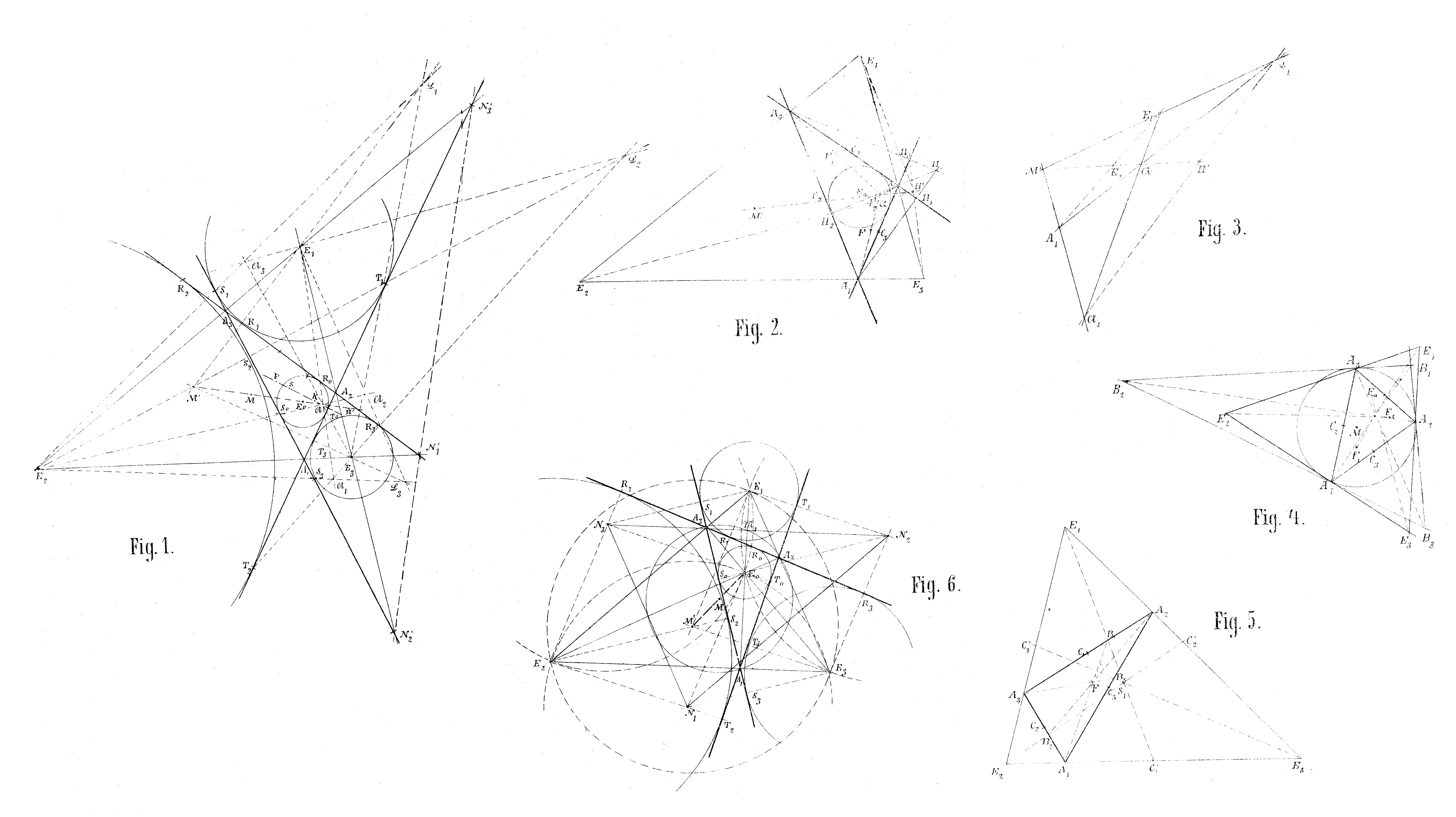
Die Koëffizienten von x_1 und x_2 in dieser Gleichung sind nun augenscheinlich identisch mit den Koëffizienten in (3). Aber auch die Koëffizienten von x_3 in beiden Gleichungen sind einander gleich. Man hat nämlich

$$2(\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 - \sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_3)\sin(\tfrac{1}{2}A_1 - \tfrac{1}{2}A_2)$$
$$= 2(\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 - \sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_3)(\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_2 - \cos\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}A_2)$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 + 2\sin\tfrac{1}{2}A_1\cos\tfrac{1}{2}A_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_3$$
$$- 2\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 - 2\sin\tfrac{1}{2}A_2\cos\tfrac{1}{2}A_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_1$$
$$= \sin A_1(\cos^2\tfrac{1}{2}A_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 + \sin^2\tfrac{1}{2}A_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_3)$$
$$- \sin A_2(\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 + \sin^2\tfrac{1}{2}A_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_1).$$

Die Entwicklung von $\cos^2(\tfrac{1}{2}A_3 - \tfrac{1}{2}A_1)$ und $\cos^2(\tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}A_3)$ in dem Koëffizienten von x_3 in der Gleichung der Geraden $C_3\mathfrak{F}_3$ liefert aber denselben Wert, da sich die doppelten Produkte tilgen. Die Unbekannte x_3 erscheint überdies in beiden Gleichungen mit demselben Zeichen.

Sohin ist die Verbindungsgerade der beiden Punkte C_3 und $\mathfrak{F}_3$ identisch mit der Durchschnittssehne der beiden Feuerbach'schen Kreise, oder der Punkt $\mathfrak{F}_3$ liegt auf der Durchschnittssehne der beiden Kreise. Da er aber auch auf dem Feuerbach'schen Kreis des Fundamentaldreieckes liegt, so muss er der eine Schnittpunkt der beiden Kreise sein — der andere ist C_3.

Johann Döttl.



Lith. Anstalt v. N. Kranzl Salzburg.

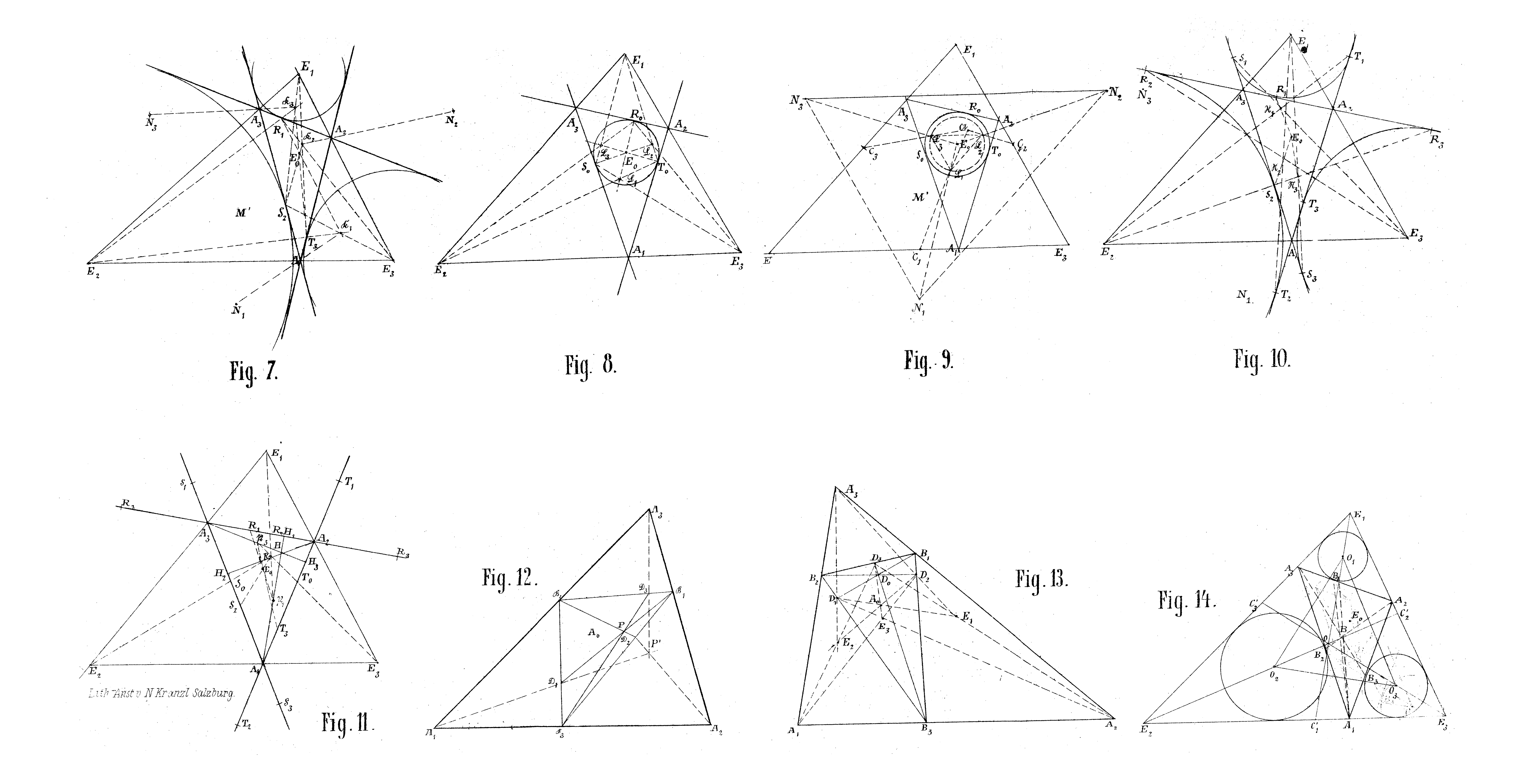
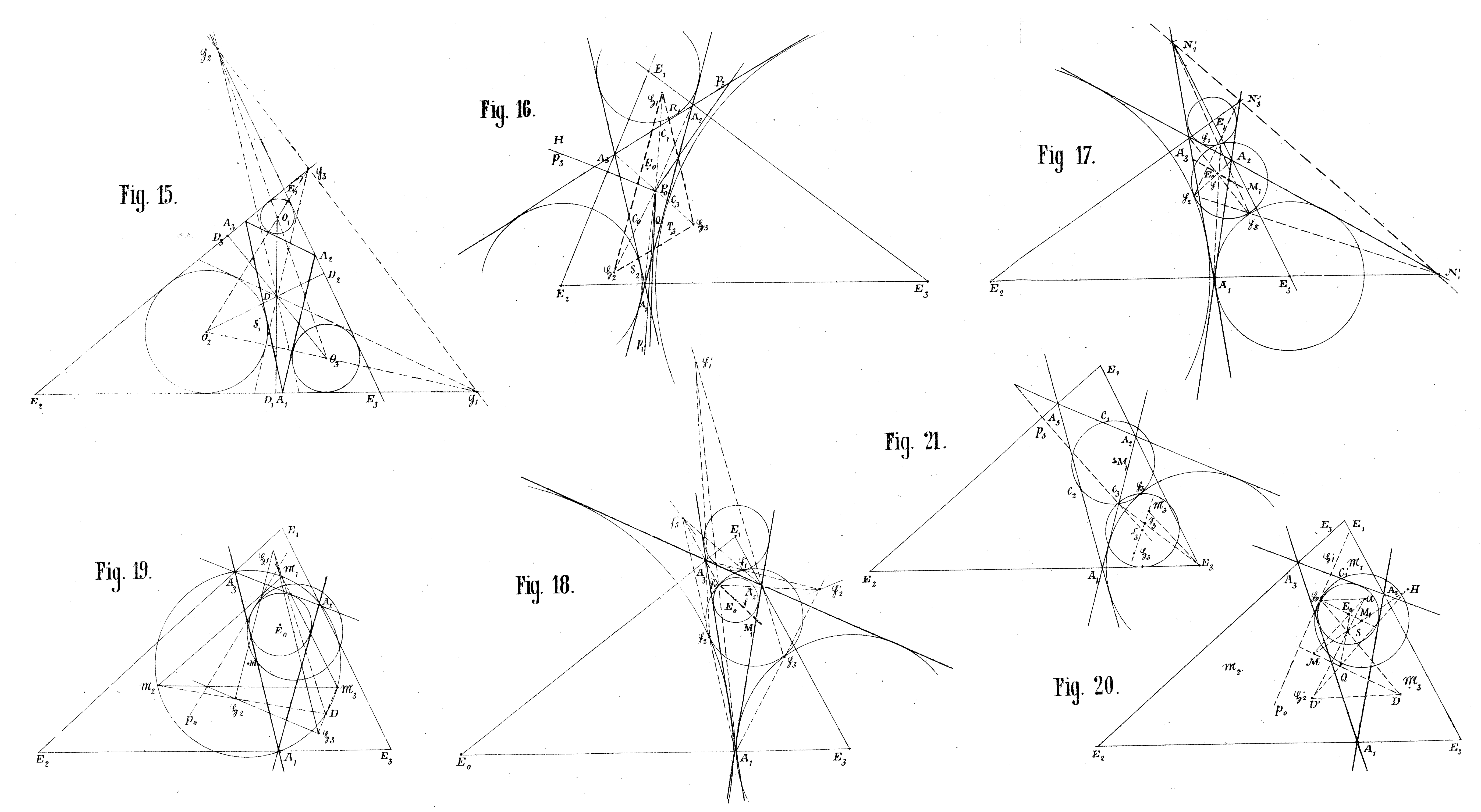


Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Lith. Anst. v. N. Kranzl Salzburg.



Lith. Anst v. N. Kranzl Salzburg.

asien.

.. Orthoëpie
– Übungen
liche Über-
- Das Me-
əs Stoffes —
handlung —
· Behandlung
ren: Zweck
— Die Er-
- Memorieren
cursorische
ıe Seite des
ı — Die grie-
sium — Die
əchischen Un-

;abe des gram-
: des Stoffes —

– Orientierung
ırts, Karte der
ərnen Dinge —
Elementarkennt-
hen Geographie,
ırtenzeichnen —

)e und Ziel des
.bstufung des hi-
, Gliederung und
offes — 4. Cultur-
. Der historische
n geographischen

ıtik, Geometrie —

oologischer, bota-
t — Lehrverfahren
sammlung.

ıemerkungen. Auf-
ıts — Lehrvorgang
:heilung des Lehr-
ın.
hen Gymnasiallehr-
ıchgefolgt. Auch in
ıllt, dass in manchen
kt war. Ebenso hat
ı und Erneuerungen
und Fortschritt der
ıuf dem Gebiete der
aft, fordert.
innt nun dies Buch
:iemlich eingehenden
he allein für das la-
et S. 32 bis 118 um-
fnisse des angehenden
.er theoretischen Aus-
ıdaktik der concreten
übersteht. Aus diesem
it ins Detail gegangen:
ırrichts, aber auch die
ɔerhaupt, ferner die Be-
Schriftsteller haben zu
ss gegeben, welche dem
zeigen sollen, „wo eine
Es ist auch wohl ein
n, der nur eine Art an-
hen kann. Da, wo die
ˈierens weniger zu be-
Instructionen mit der
sichtspunkte. Schon
ntschieden von er-
und redigiert ist,
ˈehlen.

Instructionen

für den

Unterricht an den Realschulen.

1885. 24 Bog. geh. M. 3.50.

Deutsche Sprache (25 Seiten). Grammatischer Unterricht — Orthographische Übungen — Lesen, Sprechen, Vortragen — Schriftliche Aufsätze.

Französische Sprache (27 Seiten). Aussprache — Formenlehre — Einübung der Formen — Schriftliche Arbeiten — Vocabellernen — Memorieren und Recitieren — Correctur der Arbeiten und deren Controle — Lectüre.

Englische Sprache (11 Seiten). Aussprache und Lesen — Grammatik — Correctur der Arbeiten — Lectüre — Memorieren und Recitieren — Sprechübungen — Literarische Kenntnis.

Geographie (50 Seiten). Aufgabe und Gliederung des geographischen Unterrichts — Die eigene Umgebung — Die Übungen bei jedem geographischen Unterrichte — Erweiterung des Gesichtskreises — Der Globus und die Planigloben — Physikalische Erscheinungen — Pflanzen und Thiere — Der Mensch — Beschränkung der physikalischen und naturhistorischen Beigaben.

Geschichte (22 Seiten). Wesen und Ziel des geschichtlichen Unterrichts — Lehrplan und Stundenausmass — Auswahl und Vertheilung des Lehrstoffes — Das Prüfen — Das chronologische Moment — Das biographische Moment — Die innere politische Geschichte — Die Culturgeschichte — Verhältnis des historischen zum geographischen Unterricht.

Mathematik (31 Seiten). Wesen und Ziel des mathematischen Unterrichts — Lehrvorgang — Prüfen — Hausaufgaben — Schulaufgaben — Lehr- und Übungsbuch — Besondere Bemerkungen.

Naturgeschichte (20 Seiten). Unterstufe: Synthetische oder inductive Lehrmethode. — Oberstufe: Wissenschaftliche Behandlung der Naturgeschichte — Lehrmittel.

Physik (43 Seiten). Aufgabe des physikalischen Unterrichts — Die experimentelle Seite des Unterrichts — Mathematische und verwandte Beziehungen — Beachtung des Geschichtlichen — Form des Unterrichts.

Chemie (24 Seiten). Die experimentelle Behandlung des Lehrstoffes — Auswahl und Begrenzung des Lehrstoffes — Vertheilung des Lehrstoffes auf die einzelnen Classen.

Geometrie und geometrisches Zeichnen (20 Seiten). Aufgabe des Unterrichts — Verhältnis des geometrischen Zeichnens zur Geometrie — Fragestellen und Prüfen — Definitionen — Beweise — Bewegung — Aufgaben — Geometrisches Zeichnen — Lehrgang.

Darstellende Geometrie (21 Seiten). Aufgabe des Unterrichts — Prüfen — Modelle — Aufgaben und Zeichenübungen — Körperformen — Kegelschnittslinien — Schattenconstructionen — Centrale Projection.

Freihandzeichnen (11 Seiten).

Weisungen

zur Führung des Schulamts

an den

Gymnasien in Österreich.

1885. 7 Bog. geh. 1 M.

Inhalt: 1. Classenbuch — 2. Versetzung und Versetzungsprüfungen, Wiederholungsprüfungen — 3. Semestralzeugnisse — 4. Maturitätsprüfungen — 5. Der Lehrer im Allgemeinen — 6. Der Classenvorstand — 7. Der Director — 8. Formularien.

Hofbuchdruckerei Karl Prochaska in Teschen.

Physische Beschreibung der Umgebung von Villach. Von Prof. M. Knittl. 22 S. geh. 50 Pf. = 25 kr. **12**

Isomorphismus und Polymorphismus bei den Mineralien. Von Prof. A. Schwarz. 37S. geh. 90 Pf. = 45 kr. **120**

Zur psychologischen Würdigung der Darwin'schen Descendenztheorie. Von Prof. B. Scheitz. 36 S. geh. 80 Pf. = 40 kr. **24**

Zum Dinotheriumfund bei Franzensbad im Süßwassertertiär Böhmens. Von Prof. V. Bieber. 32 S. mit 1 Tafel geh. 1 M. = 50 kr. **49**

Zur Insectenfauna der Umgebung von Weidenau. Von Prof. F. Kraszny. 19 S. geh. 50 Pf. = 25 kr. **9**

Die Fische der Drau und ihres Gebietes. Von Prof. Jul. Glowacki. 16 S. geh. 40 Pf. = 20 kr. **95**

Unsere Alpenwiesen. Von Prof. Jul. Gremblich. 32 S. geh. 70 Pf. = 35 kr. **66**

Verrucaria calciseda. Petractis exanthematica. Ein Beitrag zur Kenntnis des Baues und der Entwickelung der Krustenflechten. Von Prof. Dr. J. Steiner. 48 S. mit 2 Tafeln. geh. M. 1.30 = 65 kr. **28**

Prodromus einer Flora des Innkreises in Oberösterreich. Von Prof. Fr. Vierhapper. 37 S. geh. 80 Pf. = 40 kr. **93**

Geschichte. Biographieen.

Das Land der Skythen bei Herodot. Eine geographische Untersuchung I. Von Prof. G. Mair. 37 S. geh. 80 Pf. = 40 kr. **20**

Das Land der Skythen bei Herodot. Eine geographische Untersuchung. II. Von Prof G. Mair. 68 S. und 1 Karte. geh. M. 1.60 = 80 kr. **70**

Über das Verhältnis zwischen Kaiserthum und Senat unter Augustus und Tiberius. Studie zur römischen Kaisergeschichte. Von Prof. Dr. H. Rotter. 34 S. geh. 70 Pf. = 35 kr. **79**

Epigraphisches aus Aquileja [illegible] Prof. H. [illegible]a. 32 S. geh. 70 Pf. = 25 kr. **108**

Erziehung und Unterricht [illegible] **den Griechen.** Von Prof. F. Brežnik. 48 S. geh. [illegible] M. = 50 kr. **2**

Erziehung und Unterricht bei den Römern zur Zeit der Könige und des Freistaates. Von Prof. F. Brežnik. 32 S. geh. 70 Pf. = 35 kr. **3**

Die Regierung des Kaisers Claudius I. mit Kritik der Quellen und Hilfsmittel. Von Prof. A. Ziegler. I. Th. 50 S. geh. 1 M. = 50 kr — II. Th. 57 S. geh. M. 1.20 = 60 kr. — III. Th. 47 S. geh. 1 M. = 50 kr. — IV. Th. 52 S. geh. 1 M. = 50 kr. — V. Th. 49 S. geh. 1 M. = 50 kr. — VI. Th. 52 S. geh. 1 M. = 50 kr. **82—87**

Einfluss des öffentlichen Lebens in Rom auf die Entwicklung und den Charakter der Beredsamkeit. Von Prof. N. Gatscher. 25 S. geh. 50 Pf. = 25 kr. **89**

Die Papstwahlen von 1484 u. 1492. Von Prof. Th. Hagen. 31 S. geh. 70 Pf. = 35 kr. **96**

Über Maximilian als Jäger und im besondern über das Abenteuer des Kaisers auf der Martinswand. Von Prof. K. Kirchlechner. 37 S. geh. 80 Pf. = 40 kr. **51**

Über den Antheil der Stadt Budweis an den Kriegsereignissen des Jahres 1683. Von Prof. Heinr. Otto. 32 S. geh. 70 Pf. = 35 kr. **100**

Die Kän
Jahre
M. 1.

Die Feste
Graf.

Der histo
giöser
bauer

Materialie
Herzog
44 S. g

Beitrag z
Schlesie
90 Pf. =

Geschichte
F. Sch

Aus dem
Nachrich
bis zum
Jos. Mi

Das Gericht
alten Ge
Beitrag z
Prof. J. A

Die Herren v
Geschicht
Sonnberg,
L. Pröll.

Josef Cardina
Lebensskiz
46 S. geh.

Roger Bacon.
Prof. L. D

Eduard Mörike
chung. Vo
50 Pf. = 2

Georg Freiherr v
26 S. geh. 6

Zur Organisatio
schul-Turnlehr
20 kr.

Von den Turnspi
80 Pf. = 40 k

Beitrag zur Erzie
methode beim
Gebilde aus fre
Perspective. Vo
geh. 50 Pf. =

Der Zeichenunter
factor. Von Pr
30 kr.

Ursprung und Bede
Prof. D. Mark.

Die Zeit- und Festre
Von Prof. A. Wie